20.03.2019

Soru:	1	Toplam
Türü:	Z	---
Puan:		

Ad ve Soyad :
Numara :

Fizikte Matematik Metodlar

2018-2019 Dönemi TEBİP 2. Kısa Sınavı

1. $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$, $y = uv$, $z = z$ dönüşümleri ile verilen parabolik silindirik koordinatlarda,

i. Teğet vektörlerini, ölçek çarpanlarını ve taban vektörlerini bulunuz.

ii. Sistemin ortogonalliğini araştırınız.

iii. Normali $\vec{e}_z$ doğrultusunda olan yüzey elemanını ve hacim elemanını elde ediniz.

iv. $\varphi(u, v, z) = (u^2 + v^2)^{3/2} + 3z$ fonksiyonunun gradientini alınız.

$$\vec{\nabla} f = \frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial u_i}\vec{e}_i$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3 h_1 h_2)\right]$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

Başarılar ☺
Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ
Araş. Gör. Çağlar ÇETİNKAYA

Not: Sınav süresi 20 dakikadır.
Her şık 25 puandır.

Cevaplar:

$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$ $\qquad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\vec{r} = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)\hat{i} + uv\hat{j} + z\hat{k}$

$y = uv$

$z = z$

i) $\vec{T}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}, \qquad h_i = |\vec{T}_i| = (\vec{T}_i \cdot \vec{T}_i)^{1/2}, \qquad \vec{e}_i = \frac{\vec{T}_i}{|T_i|} = \frac{\vec{T}_i}{h_i}$

- $\vec{T}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = u\hat{i} + v\hat{j}$

$h_u = |\vec{T}_u| = (u^2 + v^2)^{1/2}$

$\vec{e}_u = \frac{\vec{T}_u}{h_u} = \frac{u\hat{i} + v\hat{j}}{(u^2+v^2)^{1/2}}$

- $\vec{T}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = -v\hat{i} + u\hat{j}$

$h_v = |\vec{T}_v| = (u^2+v^2)^{1/2} = h_u$

$\vec{e}_v = \frac{\vec{T}_v}{|\vec{T}_v|} = \frac{-v\hat{i} + u\hat{j}}{(u^2+v^2)^{1/2}}$

- $\vec{T}_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \hat{k}$

$h_z = |\vec{T}_z| = 1$

$\vec{e}_z = \frac{\vec{T}_z}{h_z} = \vec{T}_z = \hat{k} = \vec{e}_z$

ii) $\vec{T}_u \cdot \vec{T}_v = (u\hat{i} + v\hat{j}) \cdot (-v\hat{i} + u\hat{j}) = -uv + vu = 0$

$\vec{T}_u \cdot \vec{T}_z = (u\hat{i} + v\hat{j}) \cdot (\vec{e}_z) = 0$

$\vec{T}_v \cdot \vec{T}_z = (-v\hat{i} + u\hat{j}) \cdot (\vec{e}_z) = 0$

veya;

$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = \frac{(u\hat{i} + v\hat{j}) \cdot (-v\hat{j} + u\hat{j})}{(u^2+v^2)^1} = 0$

$\vec{e}_v \cdot \vec{e}_z = \frac{(-v\hat{i} + u\hat{j})}{(u^2+v^2)^2} \cdot \vec{e}_z = 0$

$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_z = \frac{(u\hat{i} + v\hat{j})}{(u^2+v^2)^{1/2}} \cdot \vec{e}_z = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{T}_u \cdot \vec{T}_v = \vec{T}_u \cdot \vec{T}_z = \vec{T}_v \cdot \vec{T}_z = 0 \\ \vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = \vec{e}_u \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_v \cdot \vec{e}_z = 0 \end{array}\right\} \text{Ortogonal sistem.}$$

Araş . Gör. Çağlar Çetinkaya
caglarcetinkaya@istanbul.edu.tr

iii) • Normali $\vec{e}_z$ doğrultusunda olan yüzey elemanı;

$$dS_z = |\vec{T}_u \times \vec{T}_v|\, du\, dv = |(h_u \vec{e}_u) \times (h_v \vec{e}_v)|\, du\, dv$$

$$dS_z = h_u h_v \underbrace{|\vec{e}_u \times \vec{e}_v|}_{\vec{e}_z}\, du\, dv \qquad \vec{e}_u \times \vec{e}_v = \vec{e}_z$$

$$h_u = h_v = (u^2+v^2)^{1/2}$$

$$dS_z = h_u h_v |\vec{e}_z|\, du\, dv$$

$$dS_z = (u^2+v^2)\, du\, dv$$

• Hacim elemanı;

$$dV = |[\vec{T}_u, \vec{T}_v, \vec{T}_z]|\, du\, dv\, dz = |\vec{T}_u \cdot (\vec{T}_v \times \vec{T}_z)|\, du\, dv\, dz$$

$$dV = h_u h_v h_z \underbrace{|\vec{e}_u \cdot (\vec{e}_v \times \vec{e}_z)|}_{1}\, du\, dv\, dz \qquad h_u = h_v = (u^2+v^2)^{1/2}$$

$$h_z = 1$$

$$dV = (u^2+v^2)\, du\, dv\, dz$$

iv)

$$\phi = (u^2+v^2)^{3/2} + 3z$$

$$\vec{\nabla}\phi = \left(\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial u_i}\vec{e}_i\right)\phi = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \phi}{\partial u_i}\vec{e}_i = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \phi}{\partial u}\vec{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial \phi}{\partial v}\vec{e}_v + \frac{1}{h_z}\frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{(u^2+v^2)^{1/2}}\frac{\partial \phi}{\partial u}\vec{e}_u + \frac{1}{(u^2+v^2)^{1/2}}\frac{\partial \phi}{\partial v}\vec{e}_v + \frac{1}{1}\frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{(u^2+v^2)^{1/2}}\left[\frac{3}{2}(u^2+v^2)^{1/2}\, 2u\right]\vec{e}_u + \frac{1}{(u^2+v^2)^{1/2}}\left[\frac{3}{2}(u^2+v^2)^{1/2}\, 2v\right] + 3\vec{e}_z$$

$$\vec{\nabla}\phi = 3u\vec{e}_u + 3v\vec{e}_v + 3\vec{e}_z \Rightarrow \vec{\nabla}\phi = 3(u\vec{e}_u + v\vec{e}_v + \vec{e}_z)$$

Araş . Gör. Çağlar Çetinkaya
caglarcetinkaya@istanbul.edu.tr