

Elektromagnetik Teori

6. Uygulama Dersi

Doc. Dr. Ertan GUDEKLI

Aras. Gör. Caglar CETINKAYA

caglarcetinkaya@istanbul.edu.tr

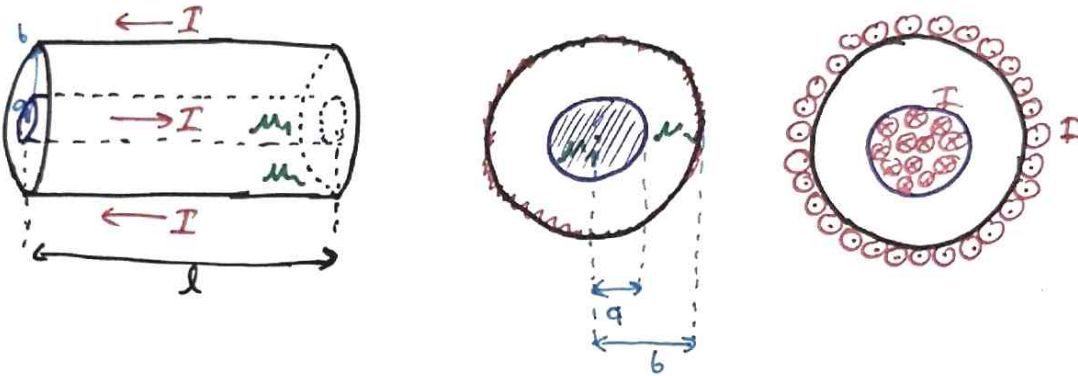
Ders notunun pdf formatını aşağıdaki linkten veya QR kodu okutarak edinebilirsiniz.

<http://aves.istanbul.edu.tr/65466/dokumanlar>



1. Uzunluğu l olan koaksiyel bir kablo şekilde gösterildiği gibi iki uzun silindirik iletkenden oluşmaktadır. Yarıçapı a olan içteki dolu silindirik iletkenin geçen kararlı I akımı yarıçapı b olan dıştaki silindirik yüzeyden geri dönmektedir. İçteki silindirik tel manyetik geçirgenliği μ_1 olan linner bir malzemeden yapılmıştır. Dış silindirik kabuk ile iç silindirik iletken arasında manyetik geçirgenliği μ_2 olan bir yalıtkan madde bulunmaktadır. Akım tüm yüzeylere homojen dağılmıştır.

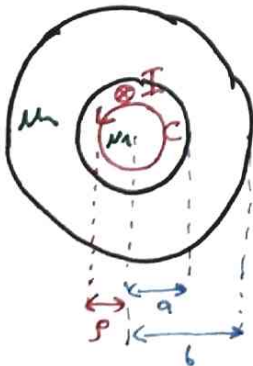
- a. $0 < \rho < a$, $a < \rho < b$, $b < \rho$ bölgelerinin herbirinde oluşan manyetik alanı bulunuz. Yanıtlarınızı akım cinsinden veriniz.
- b. Kablonun l uzunluğunda bulunan elektromanyetik enerjiyi hesaplayınız.



$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}, \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I_{\text{enc}} \Rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enc}} \left\{ \begin{array}{l} \text{maddet ortamında; } I, \vec{H} \\ \text{boşlukta; } I, \vec{B} \end{array} \right.$$

a: $\rho < a \Rightarrow$

$\vec{e}_z$



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \Rightarrow \oint \vec{H} \cdot (\rho d\phi \vec{e}_\phi) = \int \vec{j} \cdot (\rho d\phi d\vec{e}_z)$$

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

$$I = j \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$I = j \frac{a^2}{2} 2\pi$$

$I = j \hat{a} \pi$
 $j = \frac{I}{a^2 \pi}$
 Toplam akım
 Toplam akım
 cinsinden akım yoğunluğu

$$H \rho \int_0^{2\pi} d\phi = -j \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi$$

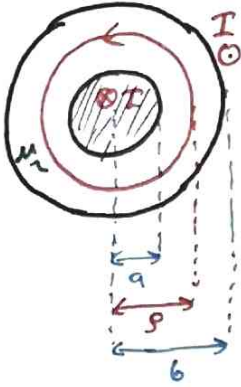
$$H \rho = -j \frac{\rho^2}{2} \Rightarrow \vec{H} = -\frac{j \rho}{2} \vec{e}_\phi$$

$$\Rightarrow \vec{H} = -\frac{I \rho}{2\pi a^2} \vec{e}_\phi // \vec{B} = \mu_1 \vec{H}$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_1 I \rho}{2\pi a^2} \vec{e}_\phi //$$

$$\bullet a < \rho < b \Rightarrow$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{enclosed}} \Rightarrow \int \vec{H} \cdot (\rho d\phi \hat{e}_\phi) = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$$



$$\Rightarrow H \rho \pi = I$$

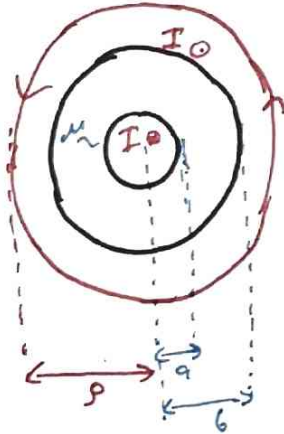
$$\vec{H} = \frac{I}{\pi \rho} \hat{e}_\phi \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_1 I}{\pi \rho} \hat{e}_\phi$$

Saat yönünde,

$$\vec{j} \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = I //$$

$$\bullet \rho > b \Rightarrow$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{enclosed}} \Rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \underbrace{\int \vec{j}(\rho < a) \cdot d\vec{A}}_{\vec{I}_1 = I(-\hat{e}_z)} + \underbrace{\int \vec{j}(\rho = b) \cdot d\vec{A}}_{\vec{I}_2 = I(+\hat{e}_z)}$$



$$\Rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{H}(\rho > b) = \vec{0} // \quad \vec{B}(\rho > b) = \vec{0} //$$

$$b) \quad W = \frac{1}{2} \int_{\text{tüm alan}} \vec{B} \cdot \vec{H} \, dV = \frac{1}{2} \left[\underbrace{\int \vec{B}(\rho < a) \cdot \vec{H}(\rho < a) \, dV}_{\vec{B} // \vec{H}} + \underbrace{\int \vec{B}(a < \rho < b) \cdot \vec{H}(a < \rho < b) \, dV}_{\vec{B} // \vec{H}} + \int \vec{B}(\rho > b) \cdot \vec{H}(\rho > b) \, dV \right]$$

$$W = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{I}{\pi a^2} \right) \left(\frac{\mu_1 I}{\pi a^2} \right) \int_0^a \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz + \left(\frac{I}{\pi \rho} \right) \left(\frac{\mu_2 I}{\pi \rho} \right) \int_a^b \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz \right]$$

$$0 < \rho < a$$

$$0 < \rho < \pi$$

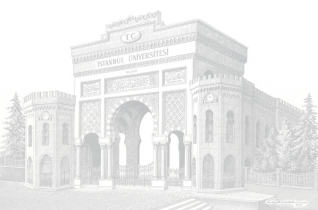
$$0 < z < L$$

$$a < \rho < b$$

$$0 < \rho < 2\pi$$

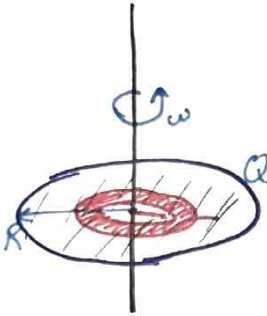
$$0 < z < L$$

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{I}{\pi} \right)^2 \left[\frac{\mu_1}{a^4} \int_0^a \rho^3 d\rho + \mu_2 \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} \right] \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz = \frac{L I^2}{4\pi} \left(\frac{\mu_1}{4} + \mu_2 \ln \frac{b}{a} \right) //$$



2. Plastikten yapılmış R yarıçaplı bir disk üzerine düzgün dağılmış bir Q yükü bulunmaktadır. Disk, merkezinden geçen veya disk düzlemine dik bir eksen etrafında sabit bir ω açısal hızıyla dönmektedir.
- a. Diskin merkezinde meydana gelen manyetik alanı ω , Q ve R cinsinden hesaplayınız.
- b. Diskin manyetik dipol momentini hesaplayınız.

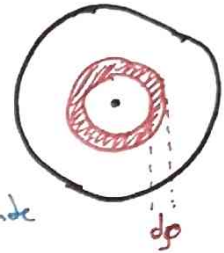
a:



$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2} \Rightarrow dq = \sigma dA$$

$$dq = \sigma \pi \rho d\rho$$

ρ yarıçapı, $d\rho$ genişliğinde bulunan yüz; dq



$$I = \frac{Q}{f} \Rightarrow di = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma \pi \rho d\rho}{\frac{2\pi}{\omega}} = \omega \sigma \rho d\rho$$

Sonuçta ince halkanın merkezinde meydana getirdiği manyetik alan;

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\rho} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{2\rho} di \Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{\omega \sigma \rho d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} d\rho$$

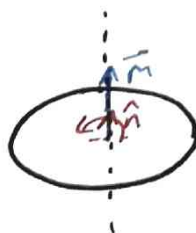
$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \int_0^R d\rho = \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2} = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R} //$$

b:

$$\vec{m} = \int \vec{S} di \Rightarrow dm = S di, d\vec{m} \parallel \vec{S} \perp \vec{S}$$

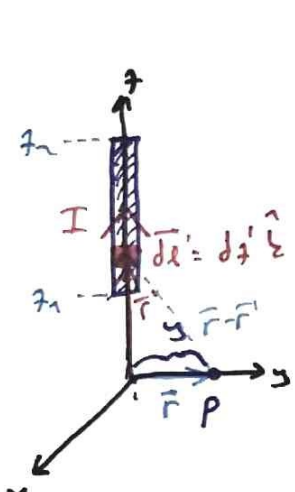
$$dm = \pi \rho^2 \omega \sigma \rho d\rho \Rightarrow m = \pi \omega \sigma \frac{R^3}{4}$$

$$\vec{m} = \frac{\omega Q R^2}{4} \hat{n}$$



3. Kararlı bir I akımı taşıyan düz bir telin sonlu bir parçasının herhangi bir P noktasında oluşturduğu magnetik vektör potansiyelini bulunuz. Manyetik potansiyeli kullanarak telin yine aynı noktada meydana getirdiği manyetik alan değerini hesaplayınız. (Teli z ekseninde z_1 'den z_2 'ye kadar koyunuz.) Yanıtınızı bir önceki uygulama dersinde aynı şekillenim için bulduğunuz manyetik alan değeri ile karşılaştırarak kontrol ediniz.

$$a: \bar{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv', \quad \bar{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dl', \quad \bar{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{k}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dA'$$



$$\bar{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dz' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz' \hat{z}}{(\tilde{r}^2 + z'^2)^{1/2}}$$

$$\vec{r} = y\hat{y}$$

$$\vec{r}' = z'\hat{z}$$

$$\bar{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dz' \hat{z}}{(\tilde{r}^2 + z'^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[z + \sqrt{\tilde{r}^2 + z^2} \right]_{z_1}^{z_2} \hat{z}$$

$$\bar{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[\frac{z_2 + \sqrt{\tilde{r}^2 + z_2^2}}{z_1 + \sqrt{\tilde{r}^2 + z_1^2}} \right] \hat{z}$$

$$b: \left. \begin{array}{l} y \rightarrow \rho \\ \hat{z} \rightarrow \hat{e}_z \\ z \rightarrow z \end{array} \right\} \bar{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[\frac{z_2 + \sqrt{\tilde{r}^2 + z_2^2}}{z_1 + \sqrt{\tilde{r}^2 + z_1^2}} \right] \hat{e}_z \quad \bar{B} = \nabla \times \bar{A}$$

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} = \frac{1}{h_\rho h_\phi h_z} \begin{vmatrix} h_\rho \hat{e}_\rho & h_\phi \hat{e}_\phi & h_z \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_\rho A_\rho & h_\phi A_\phi & h_z A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \rho \hat{e}_\phi & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix}$$

$$\bar{B} = \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - 0 \right) \hat{e}_\rho - \rho \hat{e}_\phi \left(\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) - \hat{e}_z (0) \right] = - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \hat{e}_\phi$$

$$\vec{B} = - \frac{d}{dy} \left[\ln \left(\frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 + y^2}}{z_1 + \sqrt{z_1^2 + y^2}} \right) \right] \hat{e}_\phi \frac{\mu I}{4\pi} \quad \frac{d}{dx} \ln u = \frac{u'}{u} = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

$$\vec{B} = - \left[\frac{y \frac{1}{z_2 + \sqrt{z_2^2 + y^2}} (z_2 + \sqrt{z_2^2 + y^2}) - y \frac{1}{z_1 + \sqrt{z_1^2 + y^2}} (z_1 + \sqrt{z_1^2 + y^2})}{[z_1 + \sqrt{z_1^2 + y^2}]^2} \frac{(z_2 + \sqrt{z_2^2 + y^2})}{[z_1 + \sqrt{z_1^2 + y^2}]} \right] \hat{e}_\phi$$

$$\vec{B} = - \left[\frac{y (z_2^2 + y^2)^{-1/2}}{z_2 + (z_2^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{y (z_1^2 + y^2)^{-1/2}}{z_1 + (z_1^2 + y^2)^{1/2}} \right] \hat{e}_\phi \frac{\mu I}{4\pi}$$

$$\vec{B} = - \left[\frac{y}{z_2 \sqrt{z_2^2 + y^2} + 1} - \frac{y}{z_1 \sqrt{z_1^2 + y^2} + 1} \right] \frac{\mu I}{4\pi}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi y} \left[\frac{z_2}{(z_2^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{z_1}{(z_1^2 + y^2)^{1/2}} \right] \hat{e}_\phi = \frac{\mu I}{4\pi y} \left[\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \right] \hat{e}_\phi //$$

sin α₂ sin α₁



4. Kararlı bir I akımı aşağıda verilen manyetik vektör potansiyelini oluşturmaktadır:

$$\vec{A} = \frac{C}{4} \rho^2 \hat{e}_z$$

- Akımın meydana getirdiği manyetik alanı hesaplayınız.
- Akım yoğunluğunu hesaplayınız.
- Böyle bir kararlı akımın oluşturduğu manyetik alan gerçekçi midir? Gerekli Maxwell denklemini kullanarak yanıtınızı doğrulayınız.
- Hesapladığınız manyetik alanın $\theta = \frac{\pi}{2}$, $0 < z < 5$, $1 < \rho < 2$ ile sınırlı düzlemde meydana getirdiği manyetik akıyı hesaplayınız.

a: $\vec{A} = -\frac{C\rho^2}{4} \hat{e}_z$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \rho \hat{e}_\phi & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & A_\phi & A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \left[\hat{e}_\rho \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \rho \hat{e}_\phi \frac{\partial A_z}{\partial \rho} + \hat{e}_z 0 \right]$$

$\frac{\partial A_z}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left(-\frac{\rho^2 C}{4} \right) = 0$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\rho} \left(-\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{e}_\phi = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(-\frac{\rho^2 C}{4} \right) \hat{e}_\phi = \frac{C\rho}{2} \hat{e}_\phi \parallel \vec{B}_e$$

C 'nin birimi: $\left[\frac{I}{m} \right]$

b: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \rho \hat{e}_\phi & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{C\rho}{2} & 0 \end{vmatrix} \right]$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{\rho} \left(-\hat{e}_\phi \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{C\rho}{2} \right) \right) + \frac{1}{\rho} \left(\hat{e}_z \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{C\rho}{2} \right) \right) \right] = \frac{C}{\mu_0} \frac{1}{\rho} \frac{1}{2} \hat{e}_z$$

$$\vec{J}(\rho) = \frac{C}{\mu_0 \rho^2} \hat{e}_z$$

2. soru $\Rightarrow$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$



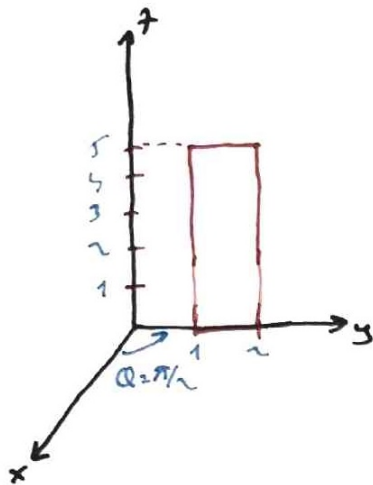
c: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ olmak $\Rightarrow$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{h_\rho h_\phi h_z} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (B_\phi h_\phi h_z) + \frac{\partial}{\partial \phi} (B_\rho h_\rho h_z) + \frac{\partial}{\partial z} (B_z h_\rho h_\phi) \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (c \rho) = 0$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow$ gerçekte bu magnet alanıdır.

d: $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int (c \frac{\rho}{z} \hat{e}_\phi) \cdot d\vec{A} = c \int \frac{\rho}{z} dA_\phi = \frac{c}{z} \iint \rho d\rho d\phi$

$$d\vec{A} = \frac{d\rho d\phi}{dA_\phi} \hat{e}_\phi$$



$Q = \pi/2$
 $0 < z < 5$
 $1 < \rho < 2$

$$\Phi_B = \frac{c}{z} \int_{\rho=1}^{\rho=2} \rho d\rho \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi = \frac{c}{z} \left(\frac{z^2 - 1}{2} \right) 2\pi$$

$$\Phi_B = \frac{15}{4} c //$$

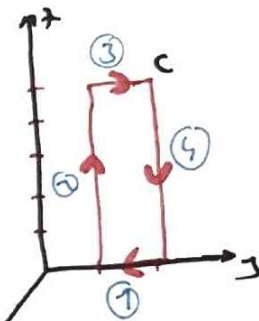
2. sol;

Stokes teoremi

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{A} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{A}$ vektör pot.
 $\vec{A}$ vektör elemanı

$$\vec{A} = -\frac{c}{4} \rho \hat{e}_\phi$$



$$\Phi_B = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{A} \cdot (d\rho \hat{e}_\rho) + \int_2 \vec{A} \cdot (dz \hat{e}_z) + \int_3 \vec{A} \cdot (d\rho \hat{e}_\rho) + \int_4 \vec{A} \cdot (dz \hat{e}_z)$$

① $\vec{A} \perp \hat{e}_\rho$ ② $\vec{A} \parallel \hat{e}_z$ ③ $\vec{A} \perp \hat{e}_\rho$ ④ $\vec{A} \parallel \hat{e}_z$

$$\Phi_B = -\frac{c}{4} \left[\int_0^5 \rho^2 dz + \int_5^0 \rho^2 dz \right] = -\frac{c}{4} \left[1 \cdot (5-0) + 4 \cdot (0-5) \right]$$

$$\Phi_B = \frac{15}{4} c //$$

