4.1. Hidrojen atomunu relativistik olarak inceleyerek E_n enerji ifadelerine gelen 1. dereceden düzeltmeyi hesaplayınız.

$$H|\gamma_{nem}\rangle = E_n|\gamma_{nem}\rangle, \quad H = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2}_{T} \underbrace{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}}_{V(r)}$$

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

Relativistik olarak; $T = \gamma mc^2 - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - mc^2$ ← durgun kütle enerjisi

$$p = \gamma m v = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$\cdot\ p^2c^2 + m^2c^4 = \frac{m^2v^2c^2 + m^2c^4\left[1-(v/c)^2\right]}{1-(v/c)^2} = \frac{m^2c^4}{1-(v/c)^2} = (T+mc^2)^2$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{p^2c^2+m^2c^4} - mc^2 \longrightarrow T = mc^2\left[\sqrt{1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2}-1\right]$$

$p \ll mc$ limitinde;

$$T = \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{H-V(r)} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \cdots$$

$$H_r' = -\frac{p^4}{8m^3c^2}$$ Hamiltonyene en düşük dereceden düzeltme terimi

$$E_r^1 = \langle H_r'\rangle = -\frac{1}{8m^3c^2}\langle\gamma|p^4|\gamma\rangle = -\frac{1}{8m^3c^2}\langle p^2\gamma|p^2\gamma\rangle$$

Tedirgenmemiş durumda; $p^2\gamma = 2m(E-V)\gamma$

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2}\langle\gamma|(E-V)^2|\gamma\rangle = -\frac{1}{2mc^2}\langle\gamma|\left[E^2+V^2-2EV\right]\gamma\rangle$$

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2}\left[E^2 + \langle V^2\rangle - 2E\langle V\rangle\right] \qquad V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}r^{-1}$$

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2}\left[E_n^2 + 2E_n\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\underline{\underline{\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle}} + \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\underline{\underline{\left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle}}\right]$$

Kramer bağıntısı;

$$\frac{u+1}{n^2}\langle r^u\rangle - \langle 2u+1\rangle a\langle r^{u-1}\rangle + \frac{u}{4}\left[(2l+1)^2 - u^2\right]a^2\langle r^{u-2}\rangle = 0$$

Bu bağıntı Hidrojen atomunun Y_{lm} durumunda bir elektron için r'nin belirli değerlerinin üç farklı kuvvete $(u, u-1, u-2)$ olan bağlılığını verir.

$u=0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{n^2}\underline{\underline{\langle r^0\rangle}} - \langle 1\rangle a\underline{\underline{\langle r^{-1}\rangle}} + \frac{0}{4}\left[(2l+1)^2 - 0^2\right]a^2\underline{\underline{\langle r^{-2}\rangle}} = 0$$

$\langle 1\rangle = 1$

$$\frac{1}{n^2} - a\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle\frac{1}{r}\right\rangle = \frac{1}{n^2 a} \quad // \qquad \left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle = \frac{1}{(l+\frac{1}{2})n^3 a^2} \quad //$$

$$\Rightarrow E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2}\left[E_n^2 + 2E_n\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{1}{n^2 a} + \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{1}{(l+\frac{1}{2})n^3 a^2}\right]$$

$$\boxed{E_r^1 = -\frac{(E_n)^2}{2mc^2}\left[\frac{4n}{l+\frac{1}{2}} - 3\right]} \qquad \frac{E_n}{mc^2} \cdot 2\times 10^{-5} \qquad E_r < E_n$$

4. 2. Spin - Yörünge etkileşmesi sonucu enerji seviyelerinde meydana gelen ΔE yarılmasının bağlı olduğu değerini Coulomb Potansiyeli için hesaplayın.

$\vec{B} = \frac{1}{emc^2}\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\vec{L}$ e⁻'nun yörüngesel hareketinden dolayı oluşan manyetik alan.

$\vec{\mu}_s = \left(\frac{q}{2m}\right)\vec{S} = \left(\frac{-e}{2m}\right)\vec{S}$ Spin manyetik momenti

$V(r) = \frac{-Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$ Coulomb Potansiyeli $\quad \frac{dV(r)}{dr} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$

- $\Delta E = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = -\left[\left(\frac{-e}{m}\right)\vec{S}\right]\cdot\left[\frac{1}{emc^2}\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\vec{L}\right]$

$\Delta E = \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 m^2c^2}\frac{1}{r^3}\vec{S}\cdot\vec{L}$

- $\langle \Delta E\rangle_{nem} = \left\langle \left(\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 m^2c^2}\frac{1}{r^3}\vec{S}\cdot\vec{L}\right)\right\rangle = \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 m^2c^2}\left\langle \frac{1}{r^3}(\vec{S}\cdot\vec{L})\right\rangle$

$[\vec{L},\vec{S}] = 0$

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \Rightarrow \vec{J}\cdot\vec{J} = (\vec{L}+\vec{S})\cdot(\vec{L}+\vec{S})$

$\vec{J}\cdot\vec{J} = \vec{L}\cdot\vec{L} + \vec{S}\cdot\vec{S} + 2\vec{S}\cdot\vec{L} \Rightarrow \hat{J}^2 = \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2\vec{S}\cdot\vec{L}$

$\vec{S}\cdot\vec{L} = \frac{\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2}{2}$

$\langle \Delta E\rangle_{nem} = \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 m^2c^2}\langle n\ell m|\frac{1}{r^3}\left(\frac{\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2}{2}\right)|n\ell m\rangle$

$\hat{J}^2|n\ell m\rangle = \hbar^2 j(j+1)$, $\hat{L}^2|n\ell m\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)$, $\hat{S}^2|n\ell m\rangle = \hbar^2 s(s+1)|n\ell m\rangle$

$$\langle \Delta E \rangle_{nem} = \frac{Ze^2}{16\pi\varepsilon_0 m^2 c^2} \langle nem | \frac{1}{r^3} \left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \right) \hbar^2 | nem \rangle$$

$$\langle \Delta E \rangle_{nem} = \frac{Ze^2\hbar^2}{16\pi\varepsilon_0 m^2 c^2} \left[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \right] \underbrace{\langle nem | \frac{1}{r^3} | nem \rangle}_{\langle \frac{1}{r^3} \rangle_{nem}}$$

$s = \frac{1}{2}$

$$\langle \Delta E \rangle_{nem} = \frac{Ze^2\hbar^2}{16\pi\varepsilon_0 m^2 c^2} \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \int \psi_{nem}^* \frac{1}{r^3} \psi_{nem} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$\psi_{nem} = R_{nl} Y_l^m$

$$\langle \Delta E \rangle_{nem} = \frac{Ze^2\hbar^2}{16\pi\varepsilon_0 m^2 c^2} \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \int_0^\infty R_{nl}^* \frac{1}{r^3} R_{nl} r^2 dr \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |Y_l^m|^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi}_{1}$$

$$\langle \Delta E \rangle_{nem} = \frac{Ze^2\hbar^2}{16\pi\varepsilon_0 m^2 c^2} \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \int_0^\infty R_{nl}^* \frac{1}{r^3} R_{nl} r^2 dr$$

Kramer bağıntısı:

$$0 = \frac{u+1}{n^2} \langle r^u \rangle_{nem} - (2u+1) a \langle r^{u-1} \rangle_{nem} + \frac{u}{4} \left[(2l+1)^2 - u^2 \right] a^2 \langle r^{u-2} \rangle_{nem}$$

Bu bağıntı hidrojen atomunun ψ_{nem} durumunda bulunan bir elektron için r'nin belirlenen değerlerinin üç farklı kuvvete $(u, u-1, u-2)$ olan bağlılığını ortaya koyar. (Ayrıntılı hesap için; Griffiths Problem 3.35'e bakınız!)

$$\int_0^\infty R_{nl}^* \frac{1}{r^3} R_{nl} r^2 dr = \frac{Z^3}{a^3 n^3 l(l+1)(l+\frac{1}{2})}$$

$$\langle \Delta E \rangle_{nem} = \frac{Z^4 e^2 \hbar^2}{16\pi\varepsilon_0 m^2 c^2 a^3} \frac{\left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right]}{\left[n^3 l(l+1)(l+\frac{1}{2}) \right]} //$$

$l=0 \Rightarrow \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle \to \infty$ fakat $l=0$ için $j(j+1) - 0 - \frac{3}{4} = 0$ olduğundan;

$$\langle \Delta E \rangle_{n00} = 0$$

$l \neq 0 \Rightarrow$ $E_n = -\frac{Z^2 e^4 m}{2(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2 n^2}$, $a = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{me^2}$, $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$

$$\langle \Delta E \rangle_{nlm} = \frac{Z^2 E_n \alpha^2}{2n} \left[\frac{j(j+1) - l(l+1) - 3/4}{l(l+1)(l+1/2)} \right]$$

j'nin alacağı değerler; $j = l + 1/2$, $j = l - 1/2$

$$\langle \Delta E \rangle_{nlm} = \begin{cases} \frac{Z^2 E_n \alpha^2}{n(2l+1)(l+1)}, & j = l + 1/2, \; l \neq 0 \\ -\frac{Z^2 E_n \alpha^2}{n(2l+1)}, & j = l - 1/2, \; l \neq 0 \end{cases}$$

4.3. Hidrojen atomunun $n=2$, $l=1$ durumu için ΔE yörüngesel potansiyel enerjisinin genliğinin, karşılık gelen seviyenin ince yapı yarılmasına karşılık gelen enerji ile aynı mertebede olup olmadığını hesap edin.

$$\langle \Delta E \rangle_{n10} = \left\langle \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \vec{S}.\vec{L} \right\rangle_{n10} \qquad \frac{dV(r)}{dr} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} r^{-2}$$

$$\langle \Delta E \rangle_{n10} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 m^2c^2} \left\langle \frac{1}{r^3} \vec{S}.\vec{L} \right\rangle_{n10}$$

$$\langle \Delta E \rangle_{n10} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 m^2c^2} \left[\frac{j(j+1) - l(l+1) - 3/4}{2} \right] \hbar^2 \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{n10}$$

$\vec{S}.\vec{L}$'nin genliği yaklaşık olarak $\hbar^2$'dir. Çünkü bu açısal momentumların herbiri $\hbar$ genliğine sahiptir.

$$\langle \Delta E \rangle_{n10} = \frac{e^2\hbar^2}{8\pi\varepsilon_0 m^2c^2} \underbrace{\langle \psi_{n10} | \frac{1}{r^3} | \psi_{n10} \rangle}_{\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle}$$

$$\psi_{n10} = R_{n1} Y_1^0$$

$$R_{n1} = \frac{1}{\sqrt{24}} \frac{1}{\sqrt{a^3}} \frac{r}{a} e^{-r/2a}$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{n10} = \int \left(\frac{1}{\sqrt{24}} \frac{1}{\sqrt{a^3}} \frac{r}{a} e^{-r/2a} \right)^* \left(\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \right)^* \frac{1}{r^3} \left(\frac{1}{\sqrt{24}} \frac{1}{\sqrt{a^3}} \frac{r}{a} e^{-r/2a} \right) \left(\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \right) r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{n10} = \frac{1}{24} \frac{1}{a^3} \frac{3}{4\pi} \frac{1}{a^2} \int_0^\infty r^2 \frac{1}{r^3} r^2 e^{-r/a} dr \int_0^\pi \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{n10} = \frac{1}{32a^5\pi} 2\pi \underbrace{\int_0^\infty r e^{-r/a} dr}_{I_1} \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_0^\infty r^2 e^{-r/a}\, dr = 1!\,(a)^{1+1} = a^2$$

$$I_2 = \int_0^\pi \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta \qquad u = \cos\theta \quad du = -\sin\theta d\theta \quad d\theta = -\frac{du}{\sin\theta}$$

$$I_2 = \int_{u=1}^{u=-1} \sin\theta\, u^2 \left(\frac{-du}{\sin\theta}\right) = -\int_1^{-1} u^2 du$$

$$I_2 = -\left[\frac{u^3}{3}\right]_1^{-1} = -\left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{210} = \frac{1}{32a^5\pi} 2\pi \left(a^2\right)\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{210} = \frac{1}{24a^3} //$$

$$\langle E \rangle_{210} = \frac{e^2\hbar^2}{8\pi\varepsilon_0 m^2c^2} \frac{1}{24a^2} \approx 10^{-23}\,j = 10^{-4}\,eV = 0{,}1\,meV$$

$$E_2 = -\frac{13{,}6\,eV}{4} \Rightarrow |E_2| = 3{,}4\,eV \qquad \left|\frac{E}{\Delta E}\right| \cong 10^4 //$$

4.4. ψ_{210} için, elektron spin manyetik momenti üzerine etki ettirdiği manyetik alan hesaplayınız.

$$\Delta E = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} \qquad \vec{\mu}_s // \vec{B} \text{ ve } \mu_s \approx \mu_B \text{ olsun;}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu_B = 9{,}27\times10^{-24}\,JT^{-1} \\ \Delta E = \langle \Delta E \rangle_{210} \cong 10^{-23}\,j \end{array}\right\} \quad B = \left|\frac{\langle \Delta E \rangle}{\mu_B}\right| = \frac{10^{-23}\,j}{10^{-23}\,JT^{-1}} \qquad B \approx 1\,Tesla //$$

4.5. Vektör modeline göre, toplam açısal momentumun mümkün değerlerini,

a) Bir f elektronu için,

b) Bir s elektronu için,

c) Bir d elektronu için bulunuz. Spektral terimleri oluşturunuz.

$^{2S+1}L_j$

Çoklu terim: $2S+1$

L: e'nun yörüngesel açısal momentumu

S: " spin " " elektron için $S = 1/2$

j: " toplam " "

$L > S \Rightarrow j$, $2S+1$ tane değer alır.

$L < S \Rightarrow j$, $2L+1$ tane değer alır.

$|L+S| \geq j \geq |L-S|$

$l = \underset{0}{s}, \underset{1}{p}, \underset{2}{d}, \underset{3}{f}, \underset{4}{g}$

a: f elektronu ise $l = 3$

$S = 1/2$

$|3-1/2| \leq j \leq |3+1/2| \Rightarrow j = 5/2, 7/2$ Çoklu terimi $= 2S+1$

$= 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow$ Ç.T. $= 2$

Spektral terimler; $^{2}F_{5/2}$, $^{2}F_{3/2}$

b: s elektronu ise; $l = 0$

$S = 1/2$

$|1/2-0| \leq j \leq |1/2+0| \Rightarrow j = 1/2$ Çoklu terim: $2 \cdot 1/2 + 1 = 1+1 = 2$

Spektral terimler; $^{2}S_{1/2}$

c: d elektronu için; $l = 2$

$S = 1/2$

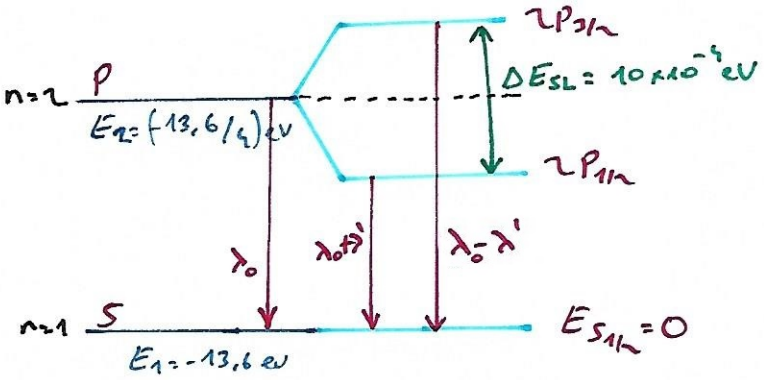
$|2+1/2| \leq j \leq |2+1/2| \Rightarrow j = 1/2, 3/2, 5/2$ Çoklu terim: $2 \cdot 1/2 + 1 = 2$

Spektral terimler; $^{2}D_{1/2}$ $^{2}D_{3/2}$ $^{2}D_{5/2}$

4.6. Hidrojen atomunun $2P$ (np) seviyesinin ince yapı yarılması yaklaşık olarak 5×10^{-4} eV kadardır. $n=2$ seviyesinde spin-yörünge etkileşmesi sonucu oluşan yarılmayı bir enerji ölçeğinde gösteriniz.

$n=2 \Rightarrow \ell=0 \longrightarrow j=0+1/2=1/2$

$S=1/2 \quad \ell=1 \longrightarrow j=|1-1/2|,\ |1+1/2| \Rightarrow j=1/2,\ 3/2 \Rightarrow {}^2P_{1/2},\ {}^2P_{3/2}$



$E_{^2P_{3/2}} = -\frac{13,6\,eV}{4} + \frac{\Delta E_{SL}}{2}$

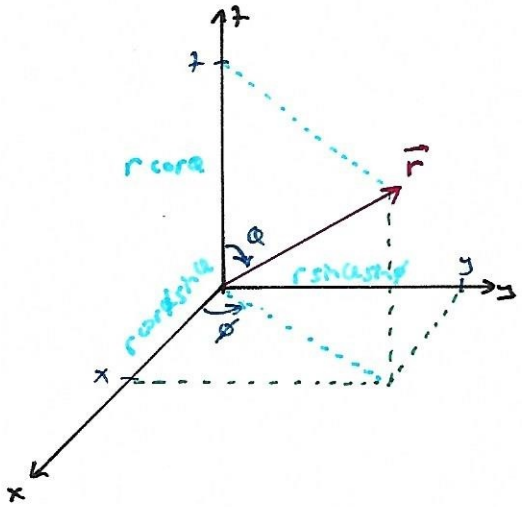
$E_{^2P_{3/2}} = (10,2 + 5\times10^{-4})\,eV$

$E_{^2P_{1/2}} = (10,2 - 5\times10^{-4})\,eV$

4.7. Bir Hidrojen atomu güçlü bir manyetik alana yerleştirildiğinde, spin-yörünge etkileşimi bozulur ve hem spin açısal momentum vektörü hem de yörüngesel açısal momentum vektörü bağımsız olarak manyetik alan doğrultusunda yönelirler. Manyetik alan z doğrultusunda uygulandığını düşünürsek, spin açısal momentumunun z bileşeni $S_z=m_s\hbar$ ve yörüngesel açısal momentumun z bileşeni $L_z=m_\ell\hbar$ özdeğerlerinde olacaktır. Burada m_s ve m_ℓ, z doğrultusunda yönelmiş güçlü manyetik alan altında ölçülebilir büyüklükleri tanımlar ve "good quantum numbers" olarak adlandırılırlar.

Bu durumda atomlar üzerine yapılan spektrum ölçümlerinde $\Delta m_\ell = 0, \pm1$ değerlerinde ışık geçişleri gözlemlenmiştir. Elektrik dipol matrisini kullanarak bu seçim kurallarını elde edin.

$$P_{fi} = |M_{fi}|^2 = \left| \iiint_0^\infty \psi_f^*(r,\theta,\phi)\, e\vec{r}\, \psi_i(r,\theta,\phi)\, \sin\theta\, r^2\, dr\, d\theta\, d\phi \right|$$



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\phi\,\hat{i} + r\sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + r\cos\theta\,\hat{k}$$

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

$$\psi_f(r,\theta,\phi) = R_f(r)\,\Theta_f(\theta)\,\Phi_f(\phi)$$

$$\Phi_f(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i m_{\ell f}\phi} \rightarrow L_z\,\Phi_f = m_{\ell f}\hbar\,\Phi_f$$

$$\psi_i(r,\theta,\phi) = R_i(r)\,\Theta_i(\theta)\,\Phi_i(\phi)$$

$$\Phi_i(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i m_{\ell i}\phi} \rightarrow L_z\,\Phi_i = m_{\ell i}\hbar\,\Phi_i$$

$$P_{fi} \propto \left| I_x\hat{i} + I_y\hat{j} + I_z\hat{k} \right|^2$$

- $$I_x = \int_{\phi=0}^{2\pi} \Phi_f^* \underbrace{(r\sin\theta\cos\phi)}_{x} \Phi_i\, d\phi = r\sin\theta \int \frac{1}{2\pi} e^{-i m_{\ell f}\phi} \cos\phi\, e^{+i m_{\ell i}\phi}\, d\phi$$

$$I_x = r\sin\theta\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\phi \left(e^{i(m_{\ell i} - m_{\ell f})\phi}\right) d\phi \qquad \left.\begin{array}{l}\Delta m_\ell = 0 \\ m_{\ell i} - m_{\ell f} = 0\end{array}\right\} I_x \neq 0$$

- $$I_y = \int_0^{2\pi} \Phi_f^* \underbrace{(r\sin\theta\sin\phi)}_{y} \Phi_i\, d\phi = r\sin\theta\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i m_{\ell f}\phi} \sin\phi\, e^{+i m_{\ell i}\phi}\, d\phi$$

$$I_y = \frac{r\sin\theta}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\phi\, e^{i(m_{\ell i} - m_{\ell f})\phi}\, d\phi \qquad \left.\begin{array}{l} m_{\ell i} - m_{\ell f} = 0 \\ \Delta m_\ell = 0\end{array}\right\} I_y \neq 0$$

- $$I_z = \int_0^{2\pi} \Phi_f^* \underbrace{r\cos\theta}_{z} \Phi_i\, d\phi = \frac{r\cos\theta}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m_{\ell i} - m_{\ell f})\phi}\, d\phi$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{\ell i} - m_{\ell f} \neq 0 \\ m_{\ell i} - m_{\ell f} = \pm 1 \\ \Delta m_\ell = \pm 1\end{array}\right\} I_z \neq 0$$

I_x ve I_y integrallerinde $\Delta m_\ell = 0$ durumunda ve I_z integralinde $\Delta m_\ell = \pm 1$ durumunda $\vec{I} = I_x\hat{i} + I_y\hat{j} + I_z\hat{k}$ ifadesi sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla elektrik dipol matrisi sıfırdan farklı bir değer alır.