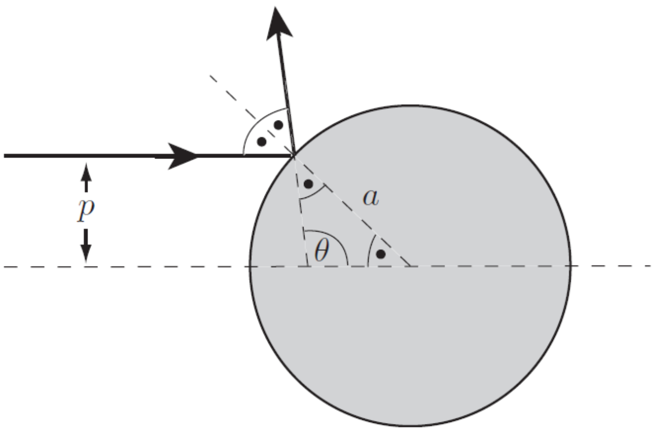
KLASİK MEKANİK 14. HAFTA UYGULAMA

1. Soru: Düzgün bir parçacık akışı, yarıçapı a olan sabit, sert bir küre üzerine gelmektedir. Küreye çarpan parçacıklar elastik olarak yansıtılmaktadırlar. Diferansiyel saçılma tesir kesitini bulunuz.

Çözüm:



Etki parametresi p olan gelen bir parçacık, elastik olarak bir θ açısı boyunca saçılmaktadır. Parçacığın geliş açısı ψ olsun ve (•) açıları, ψ ile eşit olsun. Dolayısıyla etki parametresi;

$$p = asin\psi$$

ve saçılma açısı;

$$\theta = \pi - 2\psi$$

şeklindedir.

Bu iki eşitlikte de ψ'yi ortadan kaldırdığımızda,

$$p = acos\frac{1}{2}\theta$$

eşitliğini elde ederiz. Bu da bize etki parametresi p'nin, saçılma açısı θ'nın bir fonksiyonu olan ifadeyi verir.

Diferansiyel saçılma tesir kesiti σ,

$$\sigma = -\frac{p}{sin\theta}\frac{dp}{d\theta}$$

$$= -\frac{acos\frac{1}{2}\theta}{sin\theta}\left(-\frac{1}{2}asin\frac{1}{2}\theta\right)$$

$$= \frac{1}{4}a^2$$

ile verilir.

Böylece şaşırtıcı bir şekilde parçacıkların her yöne eşit dağıldığı görülür.

Toplam saçılma tesir kesiti S;

$$S = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\sigma sin\theta d\theta d\phi$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{4}a^2\right)\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}sin\theta d\theta$$

$$= \pi a^2$$

ile verilir.

Bu da beklenen cevaptır, çünkü saçılan parçacıklar $p \leq a$ etki parametrelerine sahip olanlardır.

2. Soru: Her birinin m kütlesi ve v hızına sahip olduğu, tekdüze bir parçacık akışı, itici $F = (m\gamma^2/r^3)\hat{r}$ radyal kuvveti uygulayan sabit bir saçıcı üzerine gelmektedir. Saçılma açısı θ'nın bir fonksiyonu olarak etki parametresi p'yi ve diferansiyel saçılma tesir kesitini bulunuz.

Çözüm: $F = (m\gamma^2/r^3)\hat{r}$ kuvvet alanında, birim kütle başına dışa doğru kuvvet $f(r) = \gamma^2/r^3$ ve dolayısıyla da $f(1/u) = \gamma^2u^3$ şeklindedir. Etki parametresi p olan bir parçacığı ele alalım. O halde bu parçacığın yörüngesinin açısal momentumu $L = mpv$ ile verilir. Dolayısıyla bu parçacığın yol denklemi;

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{\gamma^2}{p^2v^2}\right)u = 0$$

şeklindedir. Bu da basit harmonik hareket ile birlikte,

$$\Omega^2 = 1 + \frac{\gamma^2}{p^2 v^2}$$

ifadesi ile verilir. Genel çözüm;

$$u = A cos\Omega\theta + \mathrm{B}\sin\Omega\theta$$

şeklindedir. Burada A ve B rastgele sabitlerdir.

A ve B sabitlerinin değerleri başlangıç koşullarından belirlenebilir. Parçacığın yaklaşma yönüne paralel olması için kutupsal koordinat sisteminin $\theta = 0$ çizgisini alalım.

i) $r \longrightarrow \infty$, $t \longrightarrow -\infty$ koşulu altında $\theta = 0$ iken $u = 0$'ı verir ve

ii) $\dot{r} \longrightarrow -v$, $t \longrightarrow -\infty$ koşulu altında $\theta = 0$ iken

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{m\dot{r}}{L} = -\frac{(-v)}{pv} = \frac{1}{p}$$

eşitliğini verir.

Başlangıç koşulları $\theta = 0$ iken $u = 0$ olduğunda $A = 0$ ve başlangıç koşulları $\theta = 0$ iken $\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{p}$ olduğunda da $B = \frac{1}{\Omega p}$ olarak elde edilirler. Dolayısıyla yörüngenin kutupsal denklemi;

$$r = \frac{\Omega p}{sin\Omega\theta}$$

şeklindedir.

$\theta = \frac{\pi}{\Omega}$ olduğunda, yani $sin\Omega\theta = 0$ iken parçacık sonsuza gitmektedir. Bu nedenle saçılma açısı $\Theta\ \left(= \pi - (\pi/\Omega)\right)$;

$$\Theta = \pi - \pi\left(1 + \frac{\gamma^2}{p^2 v^2}\right)^{-1/2}$$

şeklindedir. Bu ifadeyi etki parametresi p'nin üzerinde uyguladığımızda ise,

$$p^2 = \frac{\gamma^2(\pi - \Theta)^2}{v^2\Theta(2\pi - \Theta)}$$

olarak elde ederiz. Bu da etki parametresi p'nin, saçılma açısı Θ'nın bir fonksiyonu olan ifadedir.

Diferansiyel saçılma tesir kesiti σ;

$$\sigma = -\frac{p}{\sin\Theta}\frac{dp}{d\Theta}$$
$$= -\frac{1}{2\sin\Theta}\frac{dp^2}{d\Theta}$$
$$= -\left(\frac{\gamma^2}{2V^2\sin\Theta}\right)\frac{d}{d\Theta}\left(\frac{(\pi-\Theta)^2}{\Theta(2\pi-\Theta)}\right)$$

ile verilmektedir.

Toplam saçılma tesir kesiti S^B ise,

$$S^B = \int_{\Theta=\pi/2}^{\Theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \sigma\, sin\Theta\, d\Theta\, d\phi$$
$$= -2\pi\left(\frac{\gamma^2}{2V^2}\right)\int_{\Theta=\pi/2}^{\Theta=\pi} d\Theta\,\frac{d}{d\Theta}\left(\frac{(\pi-\Theta)^2}{\Theta(2\pi-\Theta)}\right)$$
$$= -2\pi\left(\frac{\gamma^2}{2V^2}\right)\left[\left.\frac{(\pi-\Theta)^2}{\Theta(2\pi-\Theta)}\right|_{\Theta=\pi} - \left.\frac{(\pi-\Theta)^2}{\Theta(2\pi-\Theta)}\right|_{\Theta=\pi/2}\right]$$
$$= -2\pi\left(\frac{\gamma^2}{2V^2}\right)\left[-\frac{(\pi-\pi/2)^2}{(\pi/2)(2\pi-\pi/2)}\right] = \frac{\pi\gamma^2}{3V^2}$$

ile verilir.

3. Soru:

a) Parçacıklar eşit kütleli olduğunda, elastik saçılma formülünün,

$$\theta_1 = \tfrac{1}{2}\psi \qquad \theta_2 = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\psi \qquad \theta = \tfrac{1}{2}\pi \qquad \frac{E_1}{E_0} = \cos^2\tfrac{1}{2}\psi \qquad \frac{E_2}{E_0} = \sin^2\tfrac{1}{2}\psi$$

basit şeklini alacağını gösteriniz. Burada ψ, sıfır momentum çerçevesindeki saçılma açısıdır.

b) Durgun haldeki nötronlar tarafından E enerji nötronlarının saçılmasında, deneyci $1/4\ E$ enerji nötronlarını bulmak için hangi yönlere bakmalıdır? Bu yönlerde başka hangi enerjiler gözlenebilir?

Çözüm:

Hatırlatma: Elastik Çarpışma Formülleri

A. $\tan\theta_1 = \dfrac{\sin\psi}{\cos\psi + \gamma}$	**B.** $\theta_2 = \frac{1}{2}(\pi - \psi)$
C. $\tan\theta = \left(\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\cot(\frac{1}{2}\psi)$	**D.** $\dfrac{E_2}{E_0} = \dfrac{4\gamma}{(\gamma+1)^2}\sin^2(\frac{1}{2}\psi)$

Burada; ψ, sıfır momentum çerçevesindeki saçılma açısı, $\gamma = m_1/m_2$ ise iki parçacığın kütlesinin oranı.

Dolayısıyla, $m_1 = m_2$ olduğunda $\gamma = 1$ olacağından;

i) A denklemi,

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin\psi}{\cos\psi + 1} = \tan\left(\frac{1}{2}\psi\right)$$

formunu alır. Bu nedenle $\theta_1 = \frac{1}{2}\psi$'dir.

ii) Formül **B** değişime uğramaz.

iii) C formülünde $tan\theta = \infty$ olur, böylece de $\theta = \pi/2$ olur. Eğer sonsuzluktan hoşlanılmazsa da, basit bir şekilde **A** ve **B** formüllerini kullandığımızda;

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{1}{2}\psi + \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\psi\right) = \frac{1}{2}\pi$$

eşitliğini verir.

iv) D formülü

$$\frac{E_2}{E_0} = \sin^2\frac{1}{2}\psi$$

haline gelir. Buradan da;

$$\frac{E_1}{E_0} = 1 - \frac{E_2}{E_0} = 1 - \sin^2\frac{1}{2}\psi = \cos^2\frac{1}{2}\psi$$

sonucuna ulaşırız.

Gözlenen dağınık nötronlar ise, o zaman;

$$\frac{E_1}{E} = \frac{1}{4}$$

sonucuna ulaşılır.

Böylelikle **D** formülünden;

$$\cos^2\left(\tfrac{1}{2}\psi\right) = \tfrac{1}{4}$$

eşitliği ve $\psi = 120^{\circ}$ sonucuna ulaşılır. **A** formülü ise bize $\theta_1 = 60^{\circ}$ olduğunu söylüyor. Bu nedenle $1/4\ E$ enerjili dağınık nötronları görmek için, gelen ışının yönünde 60°'lik bir açıyla bakmalıyız.

Bununla birlikte, eğer gözlemlenen nötronlar geri tepiyorsa, o zaman;

$$\frac{E_2}{E} = \frac{1}{4}$$

diyebiliriz. Böylece **D** formülünden,

$$\sin^2\left(\tfrac{1}{2}\psi\right) = \tfrac{1}{4}$$

eşitliği ve $\psi = 60^{\circ}$ sonucuna ulaşılır. Şimdi ise **A** formülü bize $\theta_1 = 30^{\circ}$ olduğunu söyler. Bu nedenle $1/4\ E$ enerjili geri tepen nötronları görmek için, gelen ışının yönünde 30°'lik bir açıyla bakmalıyız. Böylece $1/4\ E$ enerjisine sahip nötronlar, gelen ışının yönüne göre 30° ve 60° açılarda görülecektir. 30°'lik açıda $1/4\ E$ enerjili nötronların geri teptiğini ve saçılmış enerji nötronlarını;

$$E_1 = \cos^2 30^{\circ} E = \tfrac{3}{4} E$$

görüyor iken, 60°'lik açıda $1/4\ E$ enerjisine sahip dağınık nötronları ve geri tepen enerji nötronlarını görüyoruz;

$$E_2 = \sin^2 60^{\circ} E = \tfrac{3}{4} E.$$

Dolayısıyla $3/4\ E$ enerji nötronları da, 30° ve 60° açılarda görülecektir.