KLASİK MEKANİK 3. HAFTA UYGULAMA

1. Soru: Bir cisim, sürtünme kuvveti $-mKv$ (burada K pozitif bir sabit ve v cismin hızı) olan bir ortamda u hızıyla dikey olarak yukarı doğru atılmaktadır. Cismin maksimum yüksekliğini, bu yüksekliğe ulaşmak için geçen süreyi ve cismin son hızını bulunuz.

[Cisme etki eden kuvvet sürtünme kuvveti olduğundan işaret eksidir ve cebirsel kolaylık için katsayı mK alınır.]

Çözüm: Doğrusal direnç kuvveti dahil edildiğinde, hareketin skaler denklemi;

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - mKv$$

olur. Başlangıç koşulu $t = 0$ iken $v = u$ olduğunda, bu ifade v için;

$$\int \frac{dv}{g + Kv} = -\int dt$$

formunu alır. İntegralimiz, C integral sabiti olmak üzere;

$$\frac{1}{K}\ln(g + Kv) = -t + C$$

sonucunu verir.

$t = 0$ anında $v = u$ başlangıç koşulu uygulandığında, C integral sabiti;

$$C = K^{-1}\ln{(g + Ku)}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla,

$$t = \frac{1}{K} ln \left(\frac{g + Ku}{g + Kv}\right)$$

eşitliği elde edilir. Bu ifade t'yi v cinsinden verir, bu da maksimum yüksekliğe ulaşmak için geçen zamanı bulabilmek için ihtiyacımız olan ifadedir. Maksimum yüksekliğe $v = 0$ olduğunda ulaşılır, böylece maksimum yüksekliğe ulaşmak için geçen süreye τ dersek;

$$\tau = \frac{1}{K}\ln\left(1 + \frac{Ku}{g}\right)$$

olarak elde edilir.

t için ifade v cinsinden ters çevrilebilir ve t anında cismin yukarı doğru hızı için;

$$v = ue^{-Kt} - \frac{g}{K}(1 - e^{-Kt})$$

eşitliği elde edilir.

Cismin son hızı için ise bu ifade de $limit\, t \to \infty$ olarak alınır. Ve bu $limit$ sınırında üstel terimler sıfır olma eğilimindedirler. Dolayısıyla;

$v \to -\frac{g}{K}$'dır.

Böylece, sürtünmesiz hareketin aksine, cismin hızının; cisim düşerken sınırsız artmayacağı ancak sonlu $\frac{g}{K}$ değerine eğilimli olacağı sonucuna varılır. Dolayısıyla cismin son hızı $\frac{g}{K}$ 'dır.

Cismin son hızı ayrıca doğrudan hareket denkleminden de çıkarılabilir. Eğer cisim son hızda bir düşüş yaşıyorsa; $\frac{dv}{dt} = 0$ ve dolayısıyla hareket denklemi;

$0 = -mg - mKv$ halini alır. Buradan da yukarı doğru son hızının $-\frac{g}{K}$ olacağı görülebilir.

Maksimum yükseklik (z_{max}) ise $\frac{dz}{dt} = v$ denkleminin integralini alıp ardından $t = \tau$ koyarak bulunabilir. Bununla birlikte, yeniden bir hareket denklemi yazarak da (z_{max}) 'ı elde edebiliriz. Yeni hareket denklemi için yazacağımız çıkış noktası olan ifade, bazı direnç yasalarının çözümünde pratiklik açısından önem taşımaktadır. Yani eğer,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \times \frac{dz}{dt} = v\frac{dv}{dz}$$

ifadesinden faydalanırsak, hareket denklemi;

$$v\frac{dv}{dz} = -g - Kv$$

haline gelir. Denklem;

$$-\int dz = \int \frac{vdv}{g + Kv} = \frac{1}{K}\int \left(1 + \frac{g}{g + Kv}\right) dv = \frac{v}{K} - \frac{g}{K^2} ln(g + Kv) + D$$

şeklinde integre edilir.

Başlangıç koşullarımız $z = 0$ iken $v = u$ olduğunda ise;

$$z = -\frac{v}{K} + \frac{g}{K^2} ln(g + Kv) + \frac{u}{K} - \frac{g}{K^2} \ln(g + Ku) = \frac{1}{K}(u - v) - \frac{g}{K^2} ln\left(\frac{g+Ku}{g+Kv}\right)$$

ifadesine ulaşılır.

Bu ifade, v 'yi z 'nin bir fonksiyonu olarak verecek şekilde tersine çevrilemez, zaten gerekte yoktur, çünkü bu ifade z_{max} 'ı bulmamız için gereken ifadedir. Çünkü z_{max} noktasına ulaştığında cismin hızı, $v = 0$ olacaktır. Yani, cisim tarafından ulaşılan maksimum yükseklik;

$$z_{max} = \frac{u}{K} - \frac{g}{K^2} ln\left(1 + \frac{Ku}{g}\right) \text{'dir.}$$

2. Soru: Bir parçacık uniform bir yerçekimine ve doğrusal bir $-mKv$ direnç kuvvetine maruz kalmaktadır. Başlangıçta parçacık bir u hızıyla, yatayla α açısı yapacak şekilde fırlatılmaktadır. Parçacığın sonraki hareketini bulunuz.

Çözüm: Doğrusal direnç terimi dahil edildiğinde, hareket denklemi;

$$m\frac{dv}{dt} = -mKv - mgk$$

olur. Başlangıç koşulu $t = 0$ anında hız; $v = (ucos\alpha)\vec{\imath} + (usin\alpha)\vec{k}$ 'dır. Bu denklem, iki skaler hareket denklemine;

$$\frac{dv_x}{dt} + Kv_x = 0 \quad , \quad \frac{dv_z}{dt} + Kv_z = -g$$

çözümlenir.

Bu birinci dereceden denklemler, hem ayrılabilir hem de doğrusaldırlar. Doğrusal olarak ele alındığında ise integrasyon faktörü e^{-Kt} 'dir. Denklemler başlangıç koşulları yani $t = 0$ anında $v_x = ucos\alpha$ ve $v_z = usin\alpha$ eşitlikleri dikkate alınarak integre edildiğinde;

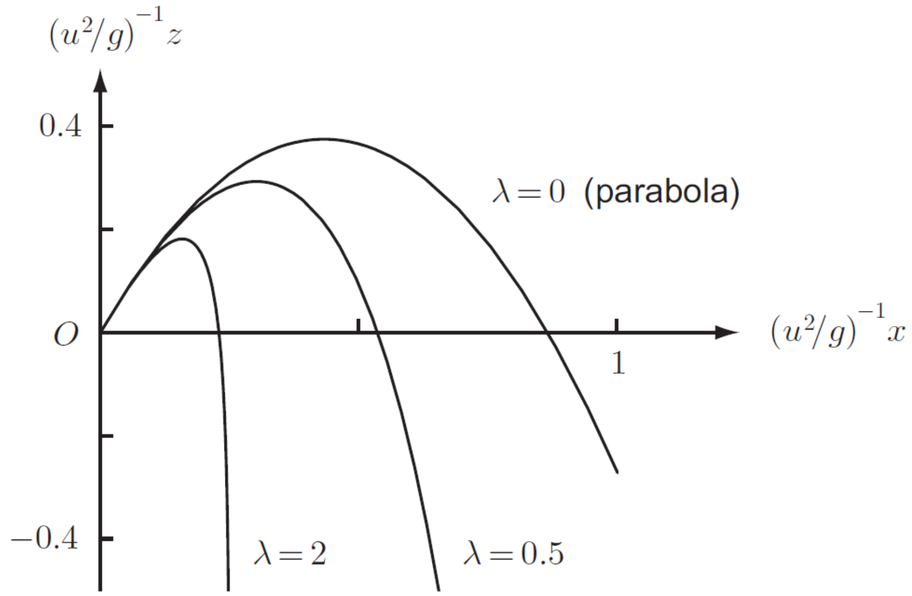
$$v_x = (ucos\alpha)e^{-Kt} \quad , \quad v_z = (usin\alpha)e^{-Kt} - \frac{g}{K}(1 - e^{-Kt})$$

elde edilir.

Parçacığın t anındaki konumu artık integre edilmiş olan, v_x, v_z ifadeleri ile ve $t = 0$ anında $x = 0$ ve $z = 0$ başlangıç koşulları uygulanarak bulunabilir. Bu da bize parçacığın yörüngesi için çözüm olan;

$$x = \frac{ucos\alpha}{K}(1 - e^{-Kt}) \quad , \quad z = \frac{Kusin\alpha + g}{K^2}(1 - e^{-Kt}) - \frac{g}{K}t \ **$$

ifadelerini verir.



Şekil-I-

Yukarıdaki şekil, aynı başlangıç koşulları ve boyutsuz direnç parametresinin;

λ $(= Ku/g)$, 3 farklı değeri için parçacık tarafından alınan tipik yolları göstermektedir. ($\lambda = 0$ durumu sıfır dirence karşılık gelir, bu durumda alınan yol bir paraboldür.) Direnç kuvvetinin hareket üzerinde dramatik bir etkisinin olduğu da açıkça görülmektedir.

2.a. Soru: Direnç parametresi λ küçük olduğunda, yataydaki menzil için yaklaşık bir formül bulunuz.

Çözüm: Parçacık Dünya'ya döndüğünde yani tekrar $z = 0$ olduğunda; uçuş süresi τ, ** denklemlerinden ikincisini sağlamaktadır;

$$(Kusin\alpha + g)(1 - e^{-K\tau}) - Kg\tau = 0$$

bu denklem de boyutsuz direnç parametresi, λ $(= Ku/g)$ göz önüne alınarak;

$$(\lambda sin\alpha + 1)(1 - e^{-K\tau}) = 0 \qquad \text{(I)}$$

olarak yeniden düzenlenebilir. Fakat bu denklem τ için açıkça çözülemez ve bu nedenle yaklaşık bir çözüme ihtiyaç vardır.

Direnç olmadığında uçuş süresi τ; $\tau = 2usin\alpha/g$ ile verildiği bilinmektedir. Dolayısıyla ancak, λ küçük olduğunda, τ için bir çözüm aramak mantıklıdır.

$$\tau = \frac{2usin\alpha}{g}[1 + b_1\lambda + \cdots] \qquad \text{(II)}$$

b_1 burada katsayı olarak tanımlanmaktadır. (II) denklemindeki katsayıyı bulmak için; (II) denklemini, (I) denkleminin sol tarafına ekleyip, λ 'nın kuvvetlerini yeniden genişletiriz ve sonra bu genişlemedeki katsayıları sıfıra eşitleriz. τ için elde edilen bu yaklaşık formül, daha sonra ** denklemlerinden ikline yerleştirilerek, λ 'nın kuvvetlerinde yeniden genişletilir. Cevap ise (iki terime kadar), düz zemindeki R menzili cinsinden şu şekilde verilmektedir;

$$(\lambda sin\alpha + 1)\left\{1 - \left[1 - \kappa\tau + \frac{(\kappa\tau)^2}{2} - \frac{(\kappa\tau)^3}{6}\right]\right\} - \kappa\tau = 0$$

$$\lambda sin\alpha\left(1 - \frac{\kappa\tau_0}{2}\right) - \frac{\kappa}{2}(\tau_0 + \lambda\tau_1) + \frac{(\kappa\tau_0)^2}{6} = 0$$

Sadece en büyük terimler alındığında,

$$\lambda sin\alpha - \frac{\kappa\tau_0}{2} = 0 \rightarrow \tau_0 = \frac{2usin\alpha}{g}$$

Yukarıdaki süre sürtünme olmadığındaki uçuş süresidir. En büyük terimlerden sonraki mertebe terimler alındığında,

$$\tau_1 = \frac{\kappa(\tau_0)^2}{3\lambda} - sin\alpha\tau_0 = -\frac{sin\alpha\tau_0}{3} \equiv b_1\tau_0$$

Sürtünme olmadığı durumdaki uçuş süresine gelen ilk düzeltme yukarıdaki terimle λ'nın çarpımıyla elde edilir.

$$R \cong \frac{ucos\alpha}{\kappa}\left\{1 - \left[1 - \kappa\tau + \frac{(\kappa\tau)^2}{2}\right]\right\}$$

$$R \cong ucos\alpha\left[\tau_0 + \lambda\tau_1 - \frac{\kappa(\tau_0)^2}{2}\right]$$

$$R \cong R_0(1 - 4\lambda sin\alpha/3) + O(\lambda^2)$$

burada R_0, direncin olmadığı durumdaki menzildir. 2. terim sürtünmenin küçük olduğu ($\lambda \ll 1$) durumda R_0 menziline gelen en önemli düzeltmedir.