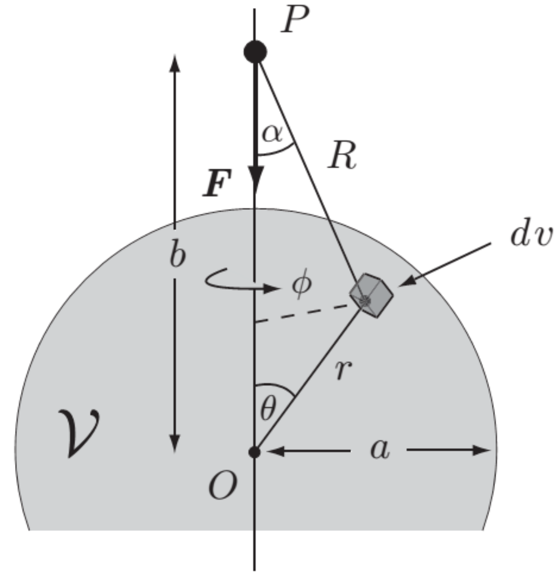
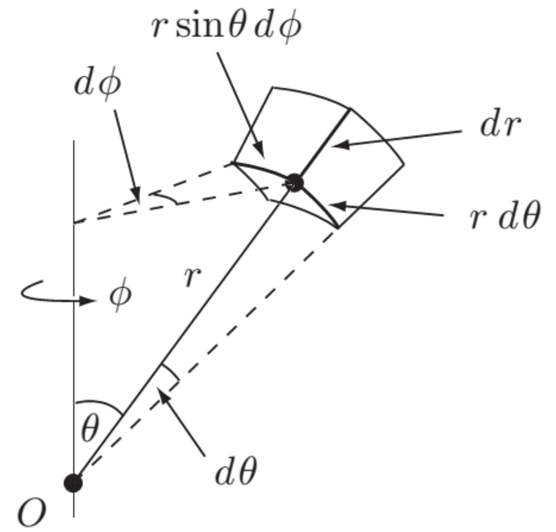
Klasik Mekanik 2. Hafta Uygulama

1. **Soru:** Kütlesi *M* olan simetrik bir kürenin (ağırlığın bir küre içinde her noktadaki yoğunluk eşit olacak şekilde dağıldığı cisim) kendisi dışındaki P noktasındaki *m* kütleli bir cisme uyguladığı kütleçekim kuvvetinin tüm ağırlığı kütle merkezi noktası O'da toplandığında uyguladığıyla aynı olduğunu ispatlayınız.





Çözüm: Küre içinde sonsuz küçük bir hacim elemanı alıp bunun P noktasındaki kütleye

$$F = mG \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho \cos\alpha}{R^2}\, dv,$$

uyguladığı kütleçekim kuvvetini yazarız. Dairesel simetriden dolayı kuvvetin x ve y yönlerindeki bileşenleri sıfır olacak, sadece z yönündeki bileşen sıfırdan farklı olacaktır. Dolayısıyla, yukarıdaki ifadede yazılan kuvvet aslında bu z yönündeki bileşendir.

$$\frac{\rho \cos\alpha}{R^2} = \frac{\rho R \cos\alpha}{R^3} = \frac{\rho(r)\,(b - r\cos\theta)}{(r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta)^{3/2}},$$

Bu ifadeyi kuvvet formülünde yerine yazıp sınırları da belirttiğimizde yapılması gereken integral şu hâli alır:

$$F = mG \int_{r=0}^{r=a} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \left(\frac{\rho(r)\,(b - r\cos\theta)}{(r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta)^{3/2}} \right) r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\phi.$$

z-ekseni etrafındaki açı (azimut açısı) integrali kolayca yapılıp integral aşağıdaki şekle sokulur.

$$\begin{aligned} F &= mG \int_{r=0}^{r=a} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{2\pi\rho(r)\,(b - r\cos\theta)}{(r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta)^{3/2}}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta \\ &= 2\pi mG \int_{r=0}^{r=a} r^2 \rho(r) \left\{ \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{(b - r\cos\theta)\sin\theta\, d\theta}{(r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta)^{3/2}} \right\} dr, \end{aligned}$$

İntegralde bir değişken dönüşümü yapılarak r yerine R kullanılır. Bu değişken döüşümü için R'yi r ve kutupsal açı cinsinden veren alttaki bağıntı kullanılır.

$$R^2 = r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta, \qquad (R > 0).$$

Bu durumda, kutupsal açı integrali şöyle olur:

$$\int_{b-r}^{b+r} \left(\frac{R^2 + (b^2 - r^2)}{2bR^3} \right) \frac{R\, dR}{rb} = \frac{1}{2rb^2} \int_{b-r}^{b+r} \left(1 + \frac{b^2 - r^2}{R^2} \right) dR = \frac{2}{b^2},$$

Sonuçta, kuvvet aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$F = \frac{mG}{b^2} \left(4\pi \int_{r=0}^{r=a} r^2 \rho(r)\, dr \right)$$

Kütlenin yoğunluk cinsinden integrali hatırlanırsa

$$\begin{aligned} M &= \int_{\mathcal{V}} \rho\, dv = \int_{r=0}^{r=a} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} r^2 \rho(r) \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi \\ &= 4\pi \int_{r=0}^{r=a} r^2 \rho(r)\, dr, \end{aligned}$$

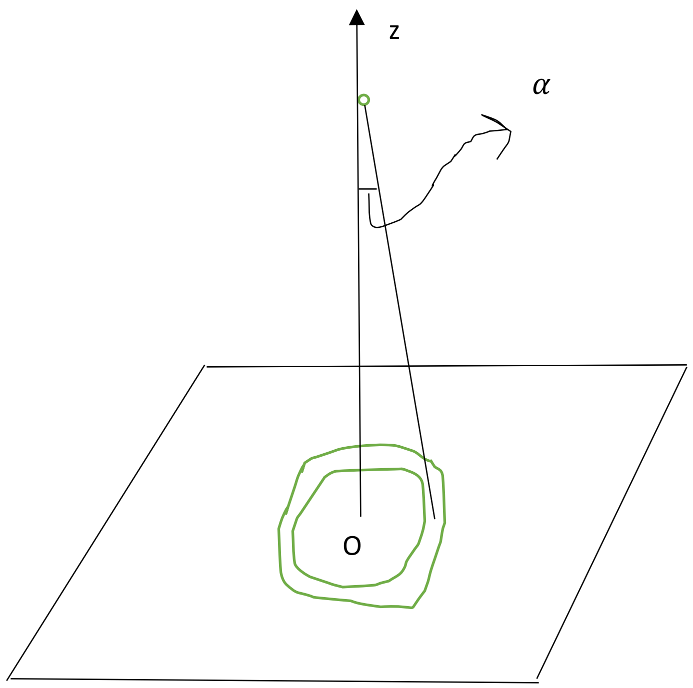
Yukarıdaki kuvvet ifadesinin iddia edildiği üzere simetrik kürenin tüm kütlesi kütle merkezinde toplanmışçasına olduğu ispatlanır.

$$F = \frac{mMG}{b^2},$$

Bu ispatın açıklığa kavuşturduğu önemli bir konu kütle dağılımının simetrik kürenin merkezine olan uzaklıkla değişebileceği $\rho \equiv \rho(r)$, ancak kutupsal ya da z-ekseni etrafındaki açıya bağlı $\left(\rho \equiv \rho(\theta, \phi)\right)$ olamayacağıdır. Eğer yoğunluk açı ile değişiyorsa bu ispat geçerliliğini yitirmektedir.

2. **Soru:** Birim alana düşen kütlesi yâni kütle alan yoğunluğu her yerde σ olan sonsuz ince bir plakanın kendisi dışındaki m kütleli bir cisme uyguladığı z yönündeki kuvvetin z bileşeninin büyüklüğünün $F_z = 2\pi G\sigma m$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm:



Sonsuz plakayı yarıçapı r, kalınlığı dr olan çemberler ile kapladığımızı düşünelim. Simetriden dolayı bu çemberlerden herbirinin m kütlesine uyguladığı kütleçekim kuvvetinin x ve y bileşenleri sıfır çıkacak, geriye sadece z bileşeni kalacaktır. Önce bu çemberlerden birinin m kütlesine uygulayacağı kütleçekim kuvvetinin z bileşenini yazalım,

$$dF_z = \frac{Gm\, dM}{r^2}\, cos\alpha = \frac{Gm\,(\sigma 2\pi\rho\, d\rho)}{r^2}\, cos\alpha$$

daha sonra da bu ifadenin integralini alarak sonsuz ince plakanın bu kütleye uygulayacağı kütleçekim kuvvetini belirleyelim.

$$F_z = \int dF_z = \int_{\rho=0}^{\infty} \frac{Gm\,(\sigma 2\pi\rho\, d\rho)}{r^2} \cdot cos\alpha = 2\pi\sigma Gm \int_0^{\infty} \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2 + z^2)} \cdot \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

$$F_z = 2\pi\sigma Gmz \int_0^{\infty} \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi\sigma Gmz \left[-(\rho^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right]\Big|_{\rho=0}^{\infty} = 2\pi\sigma Gmz \cdot \frac{1}{z} \rightarrow$$

Sonuç olarak, birim alana düşen kütlenin her yerde aynı olduğu sonsuz ince plakanın *m* kütlesine uyguladığı kütleçekim kuvveti aşağıdaki şekilde bulunmaktadır.

$$F_x = F_y = 0 \quad ,$$

$$\underline{F_z = 2\pi G\sigma m}$$

(Fizik 2 derslerinde gösterilen artı yüklü ve birim alana düşen yük yâni yük alan yoğunluğu her yerde aynı ve σ olan sonsuz ince plakanın eksi yüklü bir parçacığa uyguladığı Coulomb kuvvetinin z bileşeniyse $F_z = \frac{\sigma Q}{2\epsilon_0} = 2\pi k_e \sigma Q$ olmaktaydı. Newton'un kütleçekim yasasında Coulomb yasasındaki k_e yerine *G* , cismin yükü *Q* yerine cismin kütlesi *m* 'nin geldiği gözönüne alındığında ve σ 'nın bir soruda birim alana düşen kütle iken diğerinde birim alana düşen yük olduğu düşünüldüğünde iki sonuç birbirinin aynı çıkmaktadır!)