KLASİK MEKANİK 5. HAFTA UYGULAMA

1. Soru: Bir P parçacığı u hızıyla dikey olarak yukarı doğru atılıyor ve uniform yerçekimi altında hareket ediyor. Ulaşılan maksimum yüksekliği ve başlangıç noktasına döndüğünde P'nin hızını bulunuz.

Çözüm: P'nin başlangıç noktasından fırlatıldığını ve z-ekseni boyunca hareket ettiğini varsayalım.

Uniform yerçekimi tarafından uygulanan F kuvveti, $F = -mg$ ve buna karşılık gelen potansiyel enerji V ise,

$$V = -\int_0^z (-mg)dz = mgz$$

şeklindedir. Daha sonra enerji korunumu;

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = E$$

ifadesinden yararlanırız. Burada $V = \dot{z}$ ve E ifadesi; $t = 0$ iken $v = u$ başlangıç koşulundan belirlenir. Bu da;

$$E = \frac{1}{2}mu^2$$

eşitliğini verir. Böylece hareket için enerji korunum denklemi;

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}mu^2$$

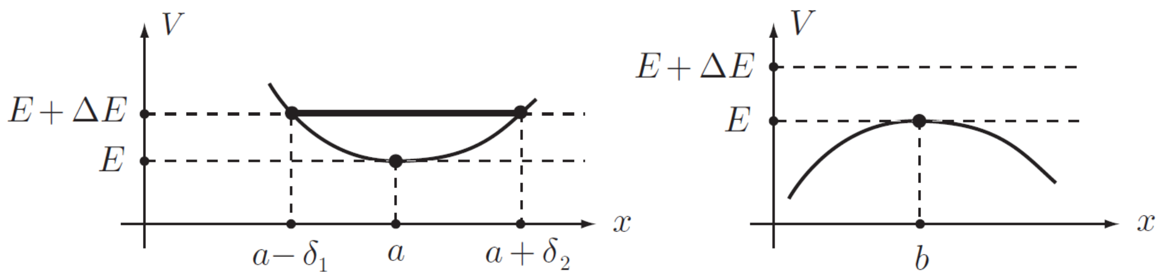
olarak elde edilir.

$z = z_{max}$ olduğunda $v = 0$ olacağından; $z_{max} = u^2/2g$ olarak bulunur.

P, O noktasına döndüğünde $z = 0$ ve dolayısıyla $|v| = u$ olacaktır. Böylece P, u fırlatılma hızıyla O'ya geri döner.

2. Soru: Kütlesi 2 olan bir P parçacığı, pozitif x-ekseninde $F = (4/x^2) - 1$ kuvvet alanı altında hareket etmektedir. Başlangıçta P, $x = 4$ noktasında, hareketsiz durumdan serbest bırakılmaktadır. Hareketin en uç noktalarını ve periyodunu bulunuz.

Çözüm:



kararlı ve kararsız denge noktaları.

F kuvvet alanı, $V = (4/x) + x$ potansiyel enerjiye sahiptir. Böylece P için enerji korunum denklemi;

$$\frac{1}{2}(2)v^2 + (4/x) + x = E$$

şeklindedir.

Burada $V = \dot{x}$ ve E toplam enerjidir. Başlangıç koşulları; $x = 4$ iken $v = 0$'dır. Bu da bize $E = 5$ değerini verir. Dolayısıyla,

$$v^2 = 5 - (4/x) - x \quad **$$

eşitliğini elde ederiz.

Hareketin en uç noktaları $v = 0$ iken, yani $x = 1$ ve $x = 4$ olduğunda gerçekleşir.

Salınımların periyodunu bulmak için, ** denklemine $v = \frac{dx}{dt}$ yazıp karekökünü almalıyız. Bu da bize ayrılabilir;

$$\frac{dx}{dt} = \pm \left[\frac{(x-1)(4-x)}{x}\right]^{1/2}$$

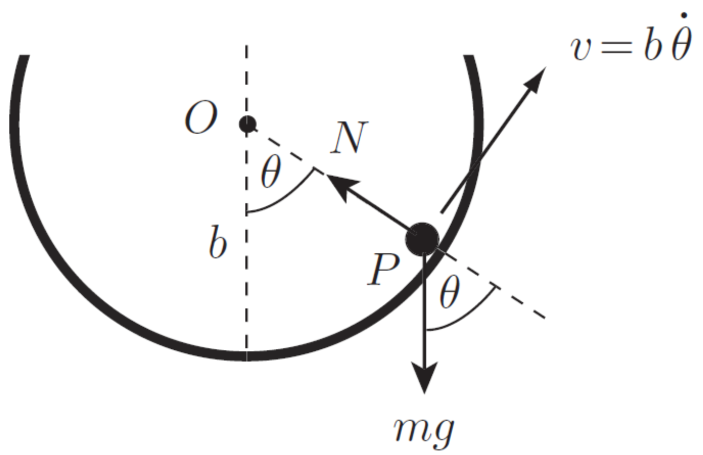
eşitliğini verir.

$\pm$ işaretleri; sırasıyla P'nin pozitif ve negatif x yönlerindeki hareketini ifade eder. Her iki tarafın integrasyonu;

$$\tau = 2\int_1^4 \left[\frac{x}{(x-1)(4-x)}\right]^{1/2} dx \approx 9.69$$

sonucunu verir.

3. Soru:



Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi sabit bir içi boş kürenin merkezi, O ve düz iç yüzeyi b yarıçaplıdır. Kürenin içindeki bir P parçacığı, en alçak iç noktadan u hızıyla yatay olarak fırlatılmaktadır. P'nin küre ile temas halinde kalması şartıyla, bir sonraki hareket denklemini veren eşitliğin,

$$v^2 = u^2 - 2gb(1 - cos\theta)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: P'ye etki eden kuvvetler; uniform yerçekimi mg ve kürenin normal kısıtlayıcı N kuvvetidir. N her zaman v'ye (P'nin çevresel hızı) dik olduğundan, N'nin etkisi olmayacağını söyleyebiliriz. Dolayısıyla enerji korunumu;

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgbcos\theta = E$$

şeklinde olacaktır. Potansiyel enerjinin sıfır seviyesi; O boyunca yatay düzlemdedir.

$\theta = 0$ olduğunda $v = u$ iken; $E = \frac{1}{2}mu^2 - mgb$ eşitliği elde edilir. Böylece enerji korunumu;

$$v^2 = u^2 - 2gb(1 - cos\theta) \qquad ***$$

olarak elde edilir. Bu ifade de, P'nin küre ile temas halinde kalırken, θ'nın bir fonksiyonu olarak v'nin değerini verir.

Soru 3.1: N, tepki kuvvetini θ'nın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

<u>Çözüm:</u> Hareket belirlendikten sonra, bilinmeyen kısıtlayıcı kuvvetler İkinci Yasayı tersine kullanarak bulunabilir. Mevcut durumda PO yönünde İkinci Yasanın $F = ma$ bileşenini düşününüz. Bu da;

$$N - mgcos\theta = m\,v^2/b$$

eşitliğini verir. Burada ivmenin dairesel hareketteki ifadesi kullanılmaktadır. Bu eşitlikte *** denklemi kullanılarak;

$$N = \frac{mu^2}{b} + mg(3cos\theta - 2) \qquad ****$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade de, P'nin küre ile temas halinde kalırken, N'nin değerini θ'nın bir fonksiyonu olarak verir.

Soru 3.2: $u = (3gb)^{1/2}$ özel durumu için, P'nin kürenin yüzeyini terk edeceğini ve bunu yaptığı θ değerini bulunuz.

$u = (3gb)^{1/2}$ değeri için *** ve **** denklemleri; v^2 ve N için,

$$v^2 = gb(1 + 2cos\theta) \qquad , \qquad N = mg(1 + 3cos\theta)$$

ifadeleri haline gelirler.

P küre ile temas halinde kalırsa, $v = 0$ olduğunda, yani $cos\theta = -1/2$ olduğunda durur. Bu ilk olarak $\theta = 120^{\circ}$ olduğunda gerçekleşir. Eğer P dairesel bir tel üzerine geçirilmiş olsaydı; $-120^{\circ} \leq \theta \leq 120^{\circ}$ aralığında periyodik salınımlar gerçekleştirirdi. Fakat mevcut durumda, N tepki kuvveti pozitif olarak sınırlandırılmıştır ve bu koşul;

$\theta > cos^{-1}(-1/3) \approx 109^{\circ}$ olduğunda ihlal edilecektir. Bu açı 120°'den küçük olduğu için, $\theta = cos^{-1}(-1/3)$ olduğunda, P küre ile teması kaybeder, ki bu da P'nin hızının $(gb/3)^{1/2}$ olduğu duruma karşılık gelmektedir.