KLASİK MEKANİK 6. HAFTA UYGULAMA

1. Soru:

a) m kütleli bir P parçacığı, $-(m\gamma/r^2)\hat{r}$ merkezi kuvvet alanı altında hareket etmektedir. $[\gamma; burada\ pozitif\ bir\ sabit.]$ Sınırlı ve sınırsız yörüngelerin E'nin değerine bağlı olarak mümkün olduğunu gösteriniz.

b)

- Bir asteroit Güneş'e çok uzak bir mesafeden yaklaşmaktadır. Bu yaklaşma hareketi süresince hızı sabit ve u'dur ve de Güneş'e dikey mesafesi p olan düz bir çizgide hareket etmektedir. Sonraki yörüngenin değme mesafesinin sağladığı denklemi bulun.
- $u^2 = 4M_{\odot}\ G/3\,p$ (burada $M_{\odot}$; Güneş kütlesi) özel durumu için;

  i) Asteroidin Güneş'e en yakın yaklaşma mesafesini ve

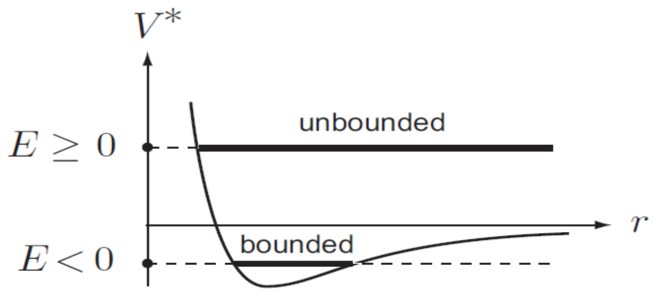
  ii) En yakın yaklaşma anında asteroidin hızını bulun.

Çözüm: a) Bu kuvvet yasası için; $V = -\gamma/r$ ve etkin potansiyel V^*;

$$V^* = -\frac{\gamma}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

şeklindedi.

Bu V^* ifadesi,



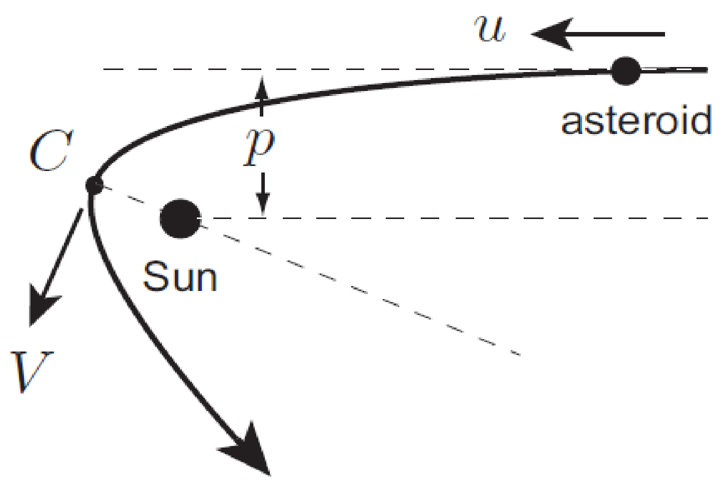
şekilde görülen forma sahiptir ve L'nin değeri ne olursa olsun, buradan da yörüngenin;

- ❖ Eğer $E < 0$ ise, sınırlı
- ❖ Eğer $E \geq 0$ ise, sınırsız

formlarında olacağı açıktır.

b)

➢



Asteroit örneğinde; $\gamma = M_{\odot}G$ sabittir. Burada $M_{\odot}$, Güneş kütlesi; G ise yerçekimi sabitidir.

Verilen başlangıç koşullarında, $L = mpu$ ve $E = mu^2/2$ olduğundan,

$E > 0$ ve yörünge sınırsızdır.

$V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = E$ denklemi değme mesafesi için,

$-\frac{\gamma}{r} + \frac{p^2u^2}{2r^2} = \frac{1}{2}u^2$ haline gelir. Bu da;

$$u^2r^2 + 2\gamma r - p^2u^2 = 0$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\gamma = M_{\odot}G$ ifadesine sahiptir.

- $u^2 = 4M_{\odot}\ G/3\,p$ özel durumu için bu denklem,

$$2r^2 + 3pr - 2p^2 = 0$$

şeklinde basitleştirilir. Asteroide en yakın yaklaşma mesafesi, bu ikinci dereceden denklemin pozitif köküdür. Yani; $r = p/2$ şeklindedir.

En yakın yaklaşmada asteroidin hızı v; açısal momentum korunumundan çıkarılabilir. Başlangıçta, $L = mpu$ ve en yakın yaklaşımda, $L = (p/2)mv$'dir. Buradan takiple $v = 2u$ olarak elde edilir.

2. Soru: Bir asteroit Güneş'e dikey mesafesi p olan bir çizgi boyunca v hızıyla Güneş'e yaklaşmaktadır. Güneş tarafından asteroidin saptırıldığı açıyı bulunuz.

Çözüm: Bu durumda da $\gamma = M_{\odot}G$ ifadesine sahibiz. Bu problem yol denklemi kullanılarak, ilk prensiplerden de çözülebilir. Fakat burada L ve E formüllerini kullanarak kolay bir şekilde çözüme ulaşacağız.

Başlangıç koşullarından; $L = pmv$ ve $E = \frac{1}{2}mv^2$ eşitliklerine sahibiz.

$E > 0$ olduğundan, yörünge bir hiperbolün yakın dalıdır ve L ve E formülleri;

$$p^2v^2 = \frac{M_{\odot}Gb^2}{a} \qquad , \qquad \frac{1}{2}v^2 = \frac{M_{\odot}G}{2a}$$

eşitliklerini verir. Basitleştirerek;

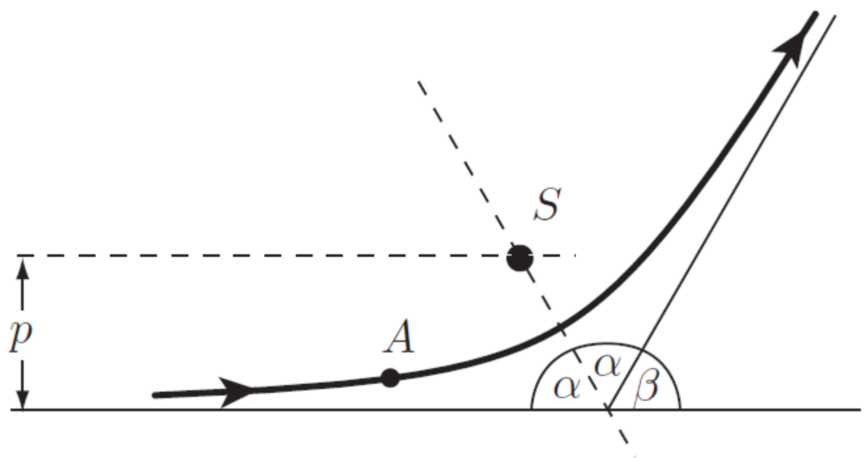
$$b = p \qquad \text{ve} \qquad a = \frac{M_{\odot}G}{v^2}$$

ifadelerini elde ederiz.

Hiperbolün asimptotları arasındaki açı α;

$$tan\alpha = \frac{b}{a} = \frac{pv^2}{M_{\odot}G}$$

ile verilir.



Şekilde de görüldüğü gibi, asteroidin yön değiştirdiği açı β olsun. Dolayısıyla $\beta = \pi - 2\alpha$ ve

$$tan(\beta/2) = tan(\pi/2 - \alpha) = cot\alpha = \frac{M_{\odot}G}{pv^2}$$

olarak elde edilir.

3. Soru: Ay, $384.000\, km$ yarıçaplı, neredeyse dairesel olan bir yörüngede ve 27.32 günlük periyotta hareket etmektedir. Jüpiter gezegeninin dördüncü ayı olan Callisto, $1.883.000\, km$ yarıçaplı ve 16.69 günlük periyotta, neredeyse dairesel bir yörüngede, hareket etmektedir. Jüpiter'in kütlesini, Dünya'nın kütlesinin bir katı olarak tayin ediniz.

Çözüm:

$$F(r) = \frac{mMG}{R^2} = \frac{mv^2}{R} = \frac{(2\pi R/T)^2}{R}$$

$$\frac{M_J}{M_E} = \frac{(R_C/R_M)^3}{(T_C/T_M)^2}$$

$$M_J = 316M_E$$