KLASİK MEKANİK 4. HAFTA UYGULAMA

1. Soru: M kütleli bir cisim, sabit bir noktadan hafif bir yayla asılır ve düzgün yerçekimi altında hareket edebilir. Denge durumunda, yayın bir b mesafesi kadar uzadığı bulunur. Bu denge konumu ile ilgili olarak cismin dikey salınım periyodunu bulunuz. (Gerilmeyi küçük varsayınız.) Cisim, u hızıyla yukarı doğru fırlatan ani bir darbe aldığında denge konumunda asılı kalır. Cismin sonraki hareketini bulunuz.

Çözüm: Yay, sabit yerçekimi kuvveti mg'ye maruz kaldığında uzama, b kadardır. Dolayısıyla yay sabiti olan α, $\alpha = mg/b$ ile verilmektedir. z; cismin denge konumundan aşağı doğru yer değiştirmesi olsun. O zaman yayın uzaması, $b + z$ ve geri yükleme kuvveti, $\alpha(b+z) = g(b+z)/b$'dir. Bu nedenle, cisim için hareket denklemi;

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - \frac{mg(b+z)}{b}$$

Yani; $\Omega^2 = g/b$ olmak üzere basit harmonik ossilatör denklemini,

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{g}{b}\right)z = 0$$

şeklinde elde ederiz. Denge konumu ile ilgili dikey salınımların τ periyodu,

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \left(\frac{b}{g}\right)^{1/2}$$

şeklinde verilir.

İlk değer probleminde sonraki hareket,

$$x = Acos\Omega t + Bsin\Omega t$$

formunda olmalıdır.

Başlangıç koşulları; $t = 0$ iken $x = 0$ ve yine $t = 0$ başlangıç koşulunda, $A = 0$ ve $\dot{x} = -u$'yu gösterirken, $\Omega B = -u$ yani $b = -{}^{u}/_{\Omega}$ ifadelerini verir. Dolayısıyla sonraki hareket denklemi;

$$x = -\frac{u}{\Omega} sin\Omega t$$

ile verilir.

2. Soru: Belli bir kararlı, sönümlü ossilatör denklemi;

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 10cost$$

şeklinde olan parçacık, başlangıçta hareketsizdir. Sonraki hareketi bulunuz.

Çözüm: İlk önce sabit kararlı tepki olan x^D'yi buluyoruz. Hareket denklemlerinin kompleks karşılığı;

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 10e^{it}$$

şeklindedir ve bu denklemin $x = ce^{it}$formundaki çözümünü arıyoruz. Bu çözümü yerine koyduğumuzda,

$$c = \frac{10}{1+3i} = 1 - 3i$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadeyi takiben kararlı tepki x^D;

$$x^D = \Re\left[(1-3i)e^{it}\right] = cost + 3sint$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi de tamamlayıcı fonksiyon x^{CF}'ye bakalım. Genel çözüm;

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

Şeklindedir. Buradan kolaylıkla;

$$x = Ae^{-t} + Be^{-2t}$$

bulunur. A ve B sırasıyla sabitlerdir. Böylece hareket denkleminin genel çözümü;

$$x = cost + 3sint + Ae^{-t} + Be^{-2t}$$

şeklindedir.

$t = 0$ iken $x = 0$ başlangıç koşulları için ifadeyi incelersek;

$$0 = 1 + A + B$$

ve $t = 0$ iken $\dot{x} = 0$ koşulunu uyguladığımızda da,

$$0 = 3 - A - 2B$$

eşitliklerini elde ederiz.

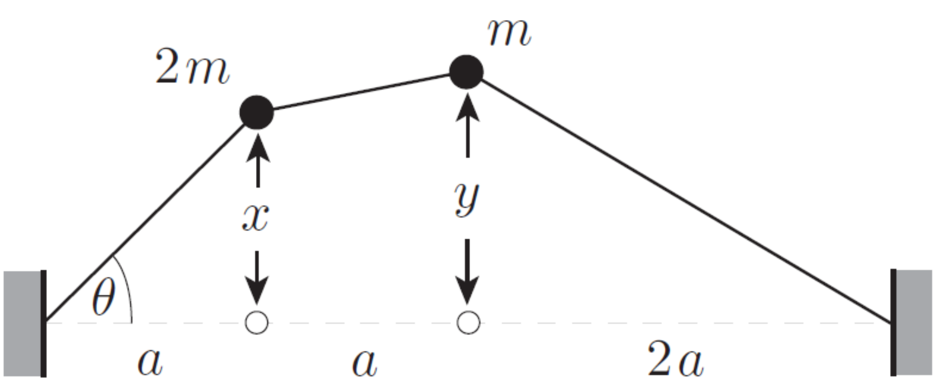
Bu eşitliklerden $A = -5$ ve $B = 4$ olarak elde edilir. Dolayısıyla ossilatörün bir sonraki denklemi;

$$x = cost + 3sint - 5e^{-t} + 4e^{-2t}$$

olarak elde edilir.

Bu durumda; geçici tepki, itici gücün birden az döngüsünden sonra önemsizdir. Kararlı tepkinin genliği; $(1^2 + 3^2)^{1/2} = \sqrt{10}$ ve faz gecikmesi ise $tan^{-1}(3/1) \approx 72^{\circ}$'dir.

3. Soru:



Yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi $2m$ ve m kütleli iki P ve Q parçacığı, iki sabit destek arasında T_0 gerilime sahip bir ip ile sabitlenmektedir. Parçacıklar, ipin denge çizgisine dik olarak, enine küçük salınımlara maruz kalmaktadırlar. Bu sistemin normal frekanslarını, normal modların formlarını ve genel hareketini bulunuz. Bulduğunuz genel hareketin periyodik olup, olmadığını tartışınız.

Çözüm: İki parçacığın, x ve y'deki yer değiştirmelerinin a değerine kıyasla daha küçük olduğunu varsayacağız. Yani ipteki üç bölüm, sonrasında denge çizgisiyle küçük açılar oluşturacaktır. Ayrıca, ipin üç bölümünün gerilimindeki herhangi bir değişikliği de ihmal edeceğiz.

İpin sol kısmı sabit T_0 gerilimine sahiptir. Bu gerilme kuvveti; P parçacığı yer değiştirdiğinde, P üzerinde bir geri yükleme görevi gören enine bileşeni $-T_0 sin\theta$ değerine sahiptir. θ küçük değerlere sahip olduğundan bu bileşen, $-T_0 x/a$'dır. Dolayısıyla, P ve Q için enine hareket denklemleri;

$$2m\ddot{x} = -\frac{T_0 x}{a} + \frac{T_0(y-x)}{a}$$

$$m\ddot{y} = -\frac{T_0(y-x)}{a} - \frac{T_0 y}{2a}$$

şeklindedir. Bu denklemler;

$$2\ddot{x} + 2n^2 x - n^2 y = 0$$

$$2\ddot{y} - 2n^2 x + 3n^2 y = 0$$

formunda da yazılabilir. Burada n; $n^2 = T_0/ma$ ile tanımlanan pozitif bir sabittir.

Bu denklemler, formun normal mod çözümlerine sahip olacaktır;

$$x = Acos(\omega t - \gamma)$$

$$y = Bcos(\omega t - \gamma).$$

Burada eşzamanlı doğrusal denklemler;

$$(2n^2 - 2\omega^2)A - n^2B = 0$$

**

$$-2n^2A + (3n^2 - 2\omega^2)B = 0$$

şeklindedir. Bu doğrusal denklemler, A ve B genlikleri için önemli bir çözüme sahiptir. Bu çözümün koşulu;

$$det\begin{pmatrix} 2n^2 - 2\omega^2 & -n^2 \\ -2n^2 & 3n^2 - 2\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

ifadesidir. Bu ifade sadeleştiğinde;

$$2\omega^2 - 5n^2\omega^2 + 2n^4 = 0$$

şeklinde ω^2 değişkeninde ikinci dereceden bir denklem elde edilir. Bu denklemin kökleri ise;

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}n^2 \qquad , \qquad \omega_2^2 = 2n^2$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, sırasıyla $n/\sqrt{2}$ ve $\sqrt{2}n$;normal frekanslarına sahip, iki normal modu vardır.

<u>Yavaş mod:</u> Yavaş modda; $\omega^2 = n^2/2$ değerine sahibiz. Böylece ** doğrusal denklemleri;

$$n^2A - n^2B = 0$$

$$-2n^2A + 2n^2B = 0$$

haline gelir. Bu iki denklemin her biri tek denklem $A = B$ ile eşdeğerdir. Dolayısıyla $A = \delta$ ve $B = \delta$ gibi önemli bir çözümler ailesine sahibiz. δ burada sıfır olmayan herhangi değeri alabilir. Bu nedenle yavaş normal mod;

$$x = \delta cos\left(nt/\sqrt{2} - \gamma\right)$$

$$y = \ \delta cos\left(nt/\sqrt{2} - \gamma\right)$$

formlarına sahiptir. Burda genlik faktörü, δ ve faz faktörü, γ herhangi bir değer alabilir.

Sonuç olarak yavaş modda iki parçacığın her zaman aynı yer değiştirmeye sahip olduğu görülür.

Hızlı mod: Hızlı modda ise $\omega^2 = 2n^2$değerine sahiptir. Yavaş modda izlediğimiz adımları uygulayarak, hızlı normal modun;

$$x = \delta cos\left(\sqrt{2}nt - \gamma\right)$$

$$y = -2\delta cos\left(\sqrt{2}nt - \gamma\right)$$

formlarına sahip olduğunu görürüz. Burda genlik faktörü, δ ve faz faktörü, γ herhangi bir değer alabilir. Hızlı modda, iki parçacığın daima zıt yönlerde hareket ettiğini ve Q'nun, P'nin iki katı genliğe sahip olduğu görülür.

Genel hareket artık ilk normal mod ile ikinci normal modun toplamıdır. Bu da bize,

$$x = \delta_1 cos\left(nt/\sqrt{2} - \gamma_1\right) + \delta_2 cos\left(\sqrt{2}nt - \gamma_2\right)$$

$$y = \delta_1 cos\left(nt/\sqrt{2} - \gamma_1\right) - 2\delta_2 cos\left(\sqrt{2}nt - \gamma_2\right)$$

eşitliklerini verir.

Bu sistem için $\tau_1/\tau_2 = \omega_2/\omega_1 = 2$'dir. Dolayısıyla, genel hareket periyodiktir ve periyodu da; $\tau_1 = 2\sqrt{2}\pi/n$'dir.