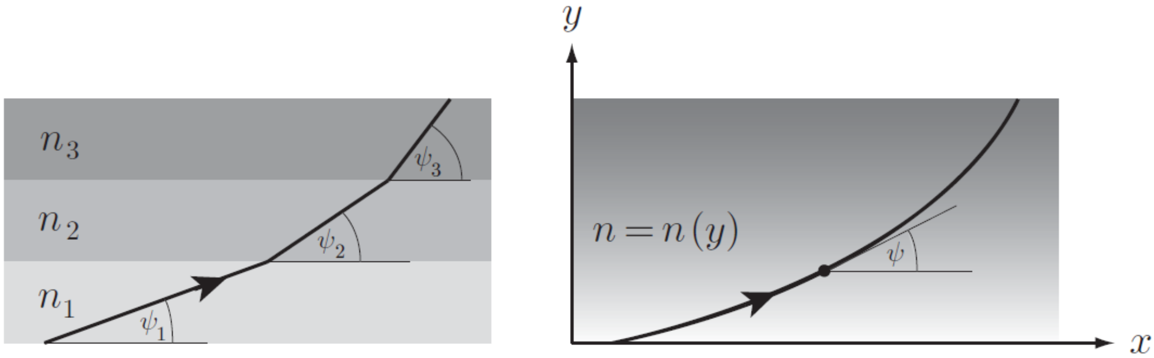
KLASİK MEKANİK 13. HAFTA UYGULAMA

1. Soru:



Yukarıdaki şekli baz alarak, ortamdaki n kırılma indisinin yalnızca y'ye bağlı olduğunu varsayalım ve (x, y) düzleminde yatan ışınları göz önünde bulunduralım. Ortamdaki bir (varsayımsal) $\mathcal{P}$ yolu, T zamanında geçilecektir. Bu da;

$$T[P] = c^{-1} \int_{\mathcal{P}} n\, ds$$

yol integrali ile verilir. T'yi durağan yapan yollar T'nin uç noktaları olduğundan, Fermat'ın ilkesi zarif bir biçimde yeniden ifade edilebilir. [Fermat'ın ilkesi; Bir ortamdaki ışık ışınlarının yolları, o ortam için fonksiyonel T'nin uç noktaları ile aynıdır.] Dolayısıyla; (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarını birbirine bağlayan ışın, fonksiyonel T'nin uç noktası olmalıdır. Böylelikle kartezyen koordinatlarda T;

$$T[y] = c^{-1} \int_{x_0}^{x_1} n(1 + \dot{y}^2)^{1/2} dx$$

formunu alır. Burada $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ ve $n = n(y)$'dir. n, x'e bağlı olmadığından, Euler-Lagrange denkleminin;

$$\dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - F = constant$$

formunu kullanabiliriz. Bu da bize;

$$L(y, \dot{y}, t) = n(y)\sqrt{1 + \dot{y}^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{n(y)\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}\right) - n'\sqrt{1 + \dot{y}^2} = 0$$

$$\frac{-n'}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}+\frac{n\ddot{y}}{(1+\dot{y}^2)^{3/2}}=0$$

$$\frac{-n'\dot{y}}{n}+\frac{\dot{y}\ddot{y}}{(1+\dot{y}^2)}=0$$

$$\frac{d}{dt}log\left[n^{-1}\sqrt{1+\dot{y}^2}\right]=0$$

$$log\left[n^{-1}\sqrt{1+\dot{y}^2}\right]=\log(1/c)$$

$$\frac{n}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}=c$$

eşitliğini verir. Burada $\dot{y}=tan\psi$ yazarsak, ψ; ışına teğet ile x-ekseni arasındaki açı olmak üzere, denklemimiz;

$$ncos\psi = constant$$

haline gelir. Yani tıpkı Snell'in katmanlı media yasasından beklendiği gibi.

2. Soru: Basit sarkaç için Hamiltonyeni ve Hamilton hareket denklemlerini bulunuz.

Çözüm: Genelleştirilmiş koordinatlarımız; a ve θ olmak üzere a burada sabittir. Dolayısıyla;

$$x=asin\theta,$$

$$y=-acos\theta$$

eşitliklerine sahibiz. Bu eşitliklerden faydalanarak kinetik ve potansiyel enerji ifadelerimizi;

$$T=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2,$$

$$V=-mgacos\theta$$

olarak elde ederiz. Dolayısıyla basit sarkaç için Lagrange ifadesi;

$$L=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2+mgacos\theta$$

şeklindedir.

θ koordinatı için konjuge momentum,

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta}$$

ifadesine sahiptir. Bu ifadeden,

$$\dot{\theta} = \frac{P_\theta}{ma^2}$$

eşitliğini elde edebiliriz. Burada Hamiltonyen;

$$H = \dot{\theta}P_\theta - L$$

şeklindedir. Bu da bize;

$$H = \frac{P_\theta^2}{2ma^2} - mgacos\theta$$

eşitliğini verir. Bu eşitlikten Hamilton hareket denklemlerini elde edebiliriz. Onlarda;

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{P_\theta}{ma^2},$$

$$\dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgasin\theta$$

şeklindedir.

Bu basit örnek, problemlerin pratik çözümü için neden Hamilton denklemleri yerine Lagrange denklemlerinin tercih edildiğini de göstermektedir. Bu durum için; Hamilton denklemlerini çözmek için, ilk denklemi t' ye göre diferansiyel olarak inceleyip ve sonra da bilinmeyen P_θ'yı ortadan kaldırmak için ikinci denklem kullanılırsa, bu bize tam olarak Lagrange denklemini;

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a}sin\theta = 0$$

verir.

3. Soru: Ters kare yörünge problemi için Hamiltonyeni ve Hamilton denklemlerini bulunuz.

Çözüm: Bu korunumlu bir sistemdir. Dolayısıyla burada $H = T + V$ ifadesine sahibiz. Genelleştirilmiş koordinatlar, kutupsal koordinatlarla birlikte, r ve θ'dır. Böylelikle kinetik ve potansiyel enerji;

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \quad , \quad V = -\frac{mMG}{r}$$

eşitlikleri ile verilir. Genelleştirilmiş koordinatlar için momentum ifadeleri ise,

$$P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \quad P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

şeklindedir. Bu ifadelerden,

$$\dot{r} = \frac{P_r}{m} \quad , \quad \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2}$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla Hamiltonyen;

$$H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} - \frac{mMG}{r}$$

olarak elde edilir.

Elde edilen bu Hamiltonyen eşitliğinden, yörünge problemi için Hamilton denklemlerini;

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{P_r}{m} \quad , \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2}$$

$$\dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{P_\theta^2}{mr^3} - \frac{mMG}{r^2} \quad , \quad \dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

şeklinde elde ederiz.