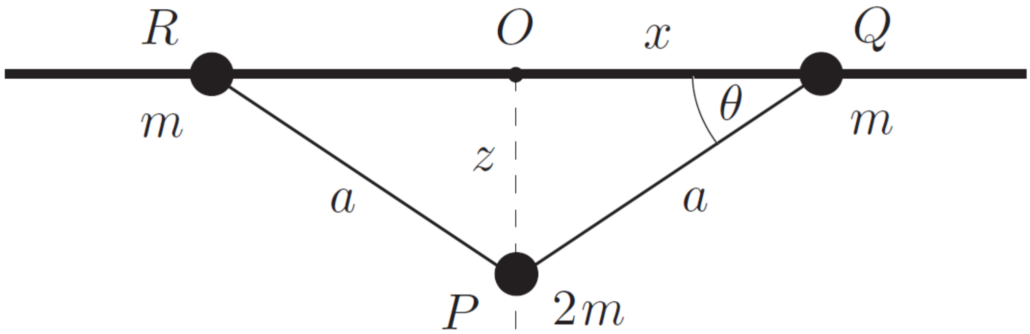
KLASİK MEKANİK 7. HAFTA UYGULAMA

1. Soru:



Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi, m kütlesine sahip Q ve R topları düz bir yayat boyunca hareket edebilirken, $2m$ kütlesine sahip P topu dikey olarak a uzunluğunda hafif uzayamaz iplerle, Q ve R toplarına bağlı bir şekilde asılı durumdadır. Sistem simetrik olarak hareket eder, böylece O; Q ve R'nin orta noktası sabit kalır ve P, O boyunca aşağı doğru dikey olarak hareket eder. Başlangıçta sistem, üç parçacığın düz bir çizgide ve dizelerin gerilmesiyle serbest bırakılır. Sistemin enerji korunum denklemini bulun.

Çözüm: Bu, bir serbestlik derecesine sahip bir sistemdir ve genel koordinat olarak θ açısını alırız.

z ve x, P ve Q parçacıklarının sabit O noktasından yer değiştirmeleri olsun. Daha sonra, θ genelleştirilmiş koordinat açısından;

$$x = acos\theta \qquad \text{ve} \qquad z = asin\theta\text{'dır.}$$

Bu eşitlikleri t'ye bağlı olarak diferansiyel bir şekilde incelersek;

$$\dot{x} = -(asin\theta)\dot{\theta} \qquad , \qquad \dot{z} = (acos\theta)\dot{\theta}$$

eşitlikleri elde edilir.

Dolayısıyla, sistemin toplam kinetik enerjisi;

$$T = \frac{1}{2}(2m)\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = ma^2\dot{\theta}^2$$

eşitliği ile verilir.

Potansiyel enerjiye tek katkı uniform yerçekiminden gelir. Böylece,

$$V = -(2m)gz + 0 + 0 = -2mgasin\theta$$

Eşitliğine sahip olunur. Burada, rayda olmak için sıfır potansiyel enerji seviyesi alınmaktadır.

Pürüzsüz ray tarafından θ ve R topları üzerine uygulanan reaksiyonlar [karşıt (tepki) kuvvetleri] raya diktir ve bu nedenle θ ve R'nin hızlarına diktir. Bu nedenle bu reaksiyonlar işe yaramaz. Ayrıca hafif uzayamaz ipler tarafından uygulanan gerilim kuvvetleri toplamda çalışmaz. Bu nedenle kısıtlama kuvvetleri toplamda iş görmez. Dolayısıyla enerji korunum denklemi;

$$E = ma^2\dot{\theta}^2 - 2mgasin\theta$$

şeklinde geçerlidir.

Başlangıç koşulları; $t = 0$ anında $\theta = \dot{\theta} = 0$ olduğundan, $E = 0$'dır. Böylece sistem için enerji korunum denklemi;

$$\dot{\theta}^2 - \frac{2g}{a} sin\theta = 0$$

olarak elde edilir.

- ➢ Toplar çarpışmadan önce geçen zamanı bulunuz.

- ❖ Bu sistem yalnızca bir serbestlik derecesine sahip olduğu için,

hareket yalnızca enerji korunumundan bulunabilir. Enerji korunum denkleminden;

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \left(\frac{2g}{a}\right)^{1/2} (sin\theta)^{1/2}$$

eşitliği elde edilir.

θ, t'nin artan bir fonksiyonu olduğundan, pozitif işaret alınır. Bu denklem birinci dereceden ayrılabilir bir denklemdir. Toplar $\theta = \pi/2$ olduğunda çarpıştığından, geçen süreye τ dersek, τ;

$$\tau = \left(\frac{a}{2g}\right)^{1/2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(sin\theta)^{1/2}} \approx 1.85 \left(\frac{a}{g}\right)^{1/2}$$

olarak bulunur.

2. Soru: Kütle yoğunluğu sabit ve x-ekseninde bulunan, L uzunluğuna sahip bir çubuğun;

a) bir ucundan,

b) bir ucundan $L/2$ kadar öteden geçen ve çubuğa dik olan, eksenlere göre eylemsizlik momentlerini hesaplayınız.

Çözüm:

a)

$M = \mu L$ olmak üzere;

$$I = \int_0^L \mu x^2 dx = \frac{1}{3} ML^2$$

olarak bulunur.

b) Aynı şekilde $M = \mu L$ olmak üzere;

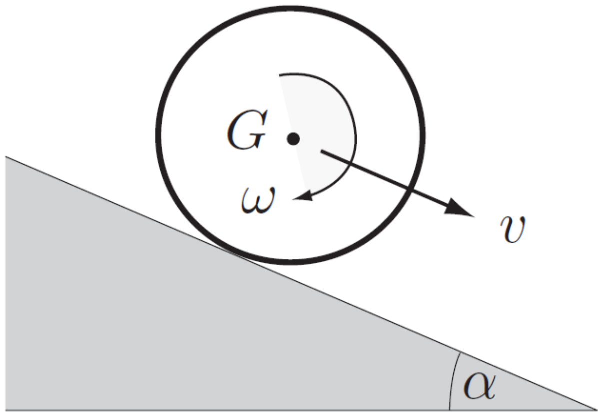
$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \mu x^2 dx = \frac{2}{3}\mu\left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{1}{12} ML^2$$

olarak bulunur.

Bu sonuç paralel eksen teoreminden de elde edilebilinir;

$$\frac{1}{3}ML^2 = I_{k.m.} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

3. Soru:



Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi, düzgün, içi boş, dairesel bir silindir, eğimli bir düzlem üzerinde, yatayla α açısı yaparak yuvarlanmaktadır. Silindirin ivmesini bulunuz.

Çözüm: Silindirin açısal hızı ω, yuvarlanma koşulu tarafından, $\omega = v/b$ olarak belirlenir. Böylece silindirin kinetik enerjisi;

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{v}{b}\right)^2$$

şeklindedir. Burada M, silindirin kütlesi ve I ise simetri ekseni etrafındaki eylemsizlik momentidir.

$I = Mb^2$ olduğu bilgisinden yararlanarak silindirin kinetik enerjisi; $T = Mv^2$ olarak bulunur.

Silindirin yerçekimi potansiyel enerjisi $V = -Mgxsin\alpha$ şeklindedir. Şimdi kısıtlayıcı kuvvetleri ele almalıyız. Eğimli düzlemin silindire uyguladığı reaksiyon kuvvetleri, silindirin yuvarlanma durumu nedeniyle sıfır hıza sahip silindirin parçacıkları üzerine etki eder. Bu nedenle reaksiyon kuvvetleri işe yaramaz. Ayrıca silindiri sabit tutan iç kuvvetlerde toplamda çalışmaz. Bu nedenle de kısıtlama kuvvetleri toplamda iş görmez. Dolayısıyla enerji korunumu;

$$E = Mv^2 - Mgxsin\alpha$$

formuna sahiptir. Bu eşitliği t'ye bağlı olarak diferansiyel bir şekilde incelersek;

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}gsin\alpha$$

ifadesi elde edilir. Bu da silindirin hareket denklemidir. Böylece silindirin düzlemdeki ivmesinin $\frac{1}{2}gsin\alpha$ olduğu sonucuna varılır.