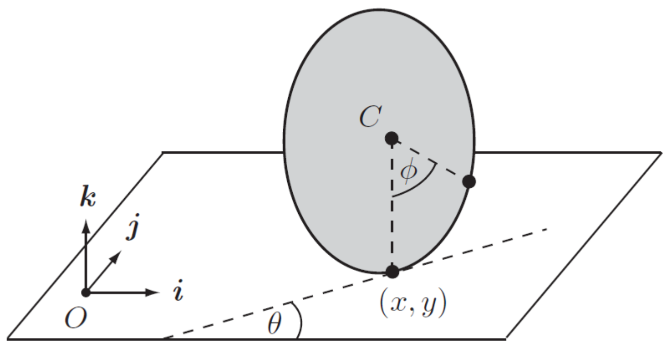
KLASİK MEKANİK 12. HAFTA UYGULAMA

1. Soru:

a) Dairesel bir silindir, pürüzlü eğimli bir düzlemde yuvarlanmaktadır. Bu problemde yuvarlanma koşulunun integre edilebilir bir kısıt olduğunu gösteriniz.

b)



Yukarıdaki şekil, dikey düzlemi ile yatay bir zemin üzerinde yuvarlanmak üzere sınırlandırılmış a yarıçapına sahip dairesel bir diski göstermektedir. Bu problemde de yuvarlanma koşulunun integre edilemeyeceğini gösteriniz.

Çözüm:

(-a. Yuvarlanma koşulunun yokluğunda, bu sistemin iki serbestlik derecesi vardır; genelleştirilmiş koordinatlar olarak x (silindir ekseninin düzlemden aşağı kayması) ve θ (silindirin dönüş açısı). Dolayısıyla yuvarlanma koşulu;

$$\dot{x} = a\dot{\theta} \tag{I}$$

birinci dereceden diferansiyel denklem ile verilir. Burada a silindirin yarıçapıdır. Fakat bu kısıtlama problemi çözmeden integre edilebilir;

$$x = a\theta. \tag{II}$$

Dolayısıyla kinematik kısıtlama (I), geometrik kısıtlamayla (II) eşdeğerdir. Böylelikle de **holonomik sistem** söz konusudur. Bu geometrik kısıtlama artık yeni (azaltılmış) bir genelleştirilmiş koordinat seti seçilerek birleştirilebilir. Bu örnekte, yuvarlanan silindirin bir serbestlik derecesine sahip olması için nihayetinde bir genelleştirilmiş koordinat (x veya θ) gereklidir.

(-b. Yuvarlanma koşulu olmadığında, bu sistem 4 serbestlik derecesine sahiptir. $Oxyz$, O zeminde ve Oz dikey olarak yukarı bakacak şekilde sabit bir dikdörtgen koordinat sistemi olsun. Ardından bir dizi genelleştirilmiş koordinat;

i) diskin C merkezinin x ve y koordinatları,

ii) disk düzlemi ile x ekseni arasındaki θ açısı,

iii) diskin ekseni etrafında döndüğü ϕ açısı,

şeklinde verilir.

Şimdi yuvarlanma koşulunu, yani temas noktasının sıfır hıza sahip olması gerektiğini empoze edeceğiz. Seçilen koordinatlar açısından,

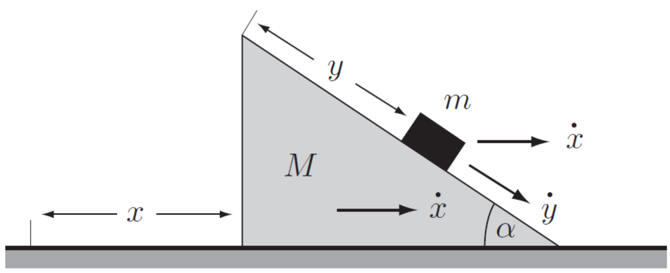
$$\dot{x} + a\dot{\phi}cos\theta = 0 \qquad , \qquad \dot{y} + a\dot{\phi}sin\theta = 0$$

eşitliklerini verir.

θ'nın zamanın bilinmeyen bir fonksiyonu olmasından ve $\dot{\theta}$'nın her iki denklemde de olmayışından dolayı bu denklemler integre edilemez.

Böylelikle, bu problemde yuvarlanma koşulunun integrallenemez olduğu ve eşdeğer kısıtlamalarla değiştirilemeyeceği sonucu çıkar. Dolayısıyla burada da **holonomik olmayan** bir sistem söz konusudur.

2. Soru:



Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi, düzgün bir yatay zemin üzerinde kayan, M kütleli bir takoz ve üzerinde de α açısı ile kayan m kütleli bir blok bulunmaktadır. Tüm hareket düzlemseldir.

a) Bu sistemin Lagrange denklemlerini bulunuz.

i) Takozun ivmesini ve

ii) blokun ivmesini bulunuz.

b) Genelleştirilmiş momentumunu bulunuz.

Çözüm:

(-a. Bu sistem 2 serbestlik derecesine sahiptir. Genelleştirilmiş koordinatlar olarak; takozun zeminde yer değiştirmesi olan x' i ve bloğun takoz üzerinde yer değiştirmesi olan y'yi alıyoruz. x ve y cinsinden kinetik ve potansiyel enerji;

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}cos\alpha)$$

$$V = -mgysin\alpha$$

şeklindedir.

T ve V'nin gerekli kısmi türevleri;

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + (m\cos\alpha)\dot{y}, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = (m\cos\alpha)\dot{x} + m\dot{y}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = -mg\sin\alpha.$$

şeklindedir.

Artık Lagrange denklemlerini oluşturabiliriz. x koordinatına karşılık gelen denklem;

$$\frac{d}{dt}[(M+m)\dot{x} + (mcos\alpha)\dot{y}] - 0 = 0 \qquad \text{(I)}$$

ve y koordinatına karşılık gelen denklem;

$$\frac{d}{dt}[(mcos\alpha)\dot{x} + m\dot{y}] - 0 = mgsin\alpha \qquad \text{(II)}$$

şeklindedir. (I) ve (II) denklemlerini çözdüğümüzde ise,

$$\ddot{x} = -\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}, \qquad \ddot{y} = \frac{(M+m)g\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha},$$

gerekli ivmeleri elde ederiz. İkisi de sabittir.

*Bu sonuçlar elbette daha temel yollarla elde edilebilir. Örneğin, bu sorunu doğrusal momentum ve enerjinin korunumuna başvurarak çözebiliriz. Fakat Lagrange yöntemi, sorunu çözmek için daha az fiziksel içgörüye ihtiyaç duyulması avantajına sahiptir.

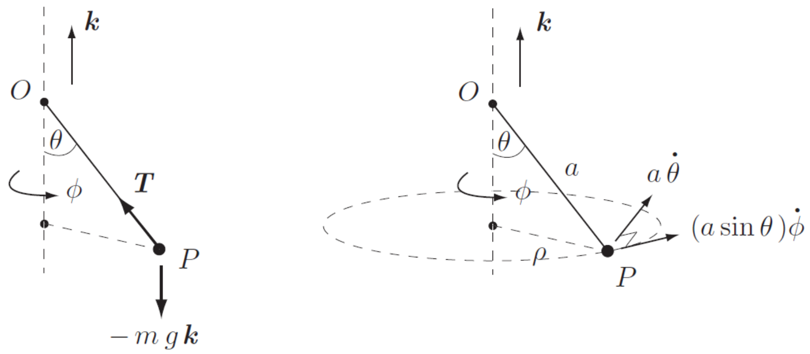
(-b. Lagrange denkleminden yola çıkarak, P_x ve P_y;

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m(\dot{x} + \dot{y}cos\alpha)$$

$$P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m(\dot{y} + \dot{x}cos\alpha)$$

eşitlikleri ile verilir.

3. Soru:



Yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi bir küresel sarkacı ele alalım. Lagrange'ı;

$$L = \tfrac{1}{2}ma^2\left[\dot{\theta}^2 + (\sin\theta\,\dot{\phi})^2\right] + mga\cos\theta$$

ile verilmektedir. ϕ'nin periyodik bir koordinat olduğunu doğrulayınız ve de karşılık gelen momentumu bulunuz.

Çözüm:

$$x = asin\theta cos\phi$$

$$y = asin\theta sin\phi$$

$$z = acos\theta$$

Genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden kinetik ve potansiyel enerji;

$$T = \frac{1}{2}m\left[\left(a\dot{\theta}\right)^2 + \left(asin\theta\dot{\phi}\right)^2\right]$$

$$V = -mgacos\theta$$

şeklindedir.

Lagrange denklemi ise,

$$L = T - V$$

olmak üzere,

$$L = \frac{1}{2}m\left[\left(a\dot{\theta}\right)^2 + \left(asin\theta\dot{\phi}\right)^2\right] + mgacos\theta$$

ile ifade edilir.

$\frac{dL}{d\phi} = 0$ olduğundan ϕ koordinatı periyodiktir. Momentum korunur ve,

$$P_\phi = \frac{dL}{d\dot{\phi}} = ma^2 sin^2\theta\dot{\phi}$$

şeklinde elde edilir. Bu genelleştirilmiş momentum, aslında sarkacın kutup ekseni etrafındaki açısal momentumudur.