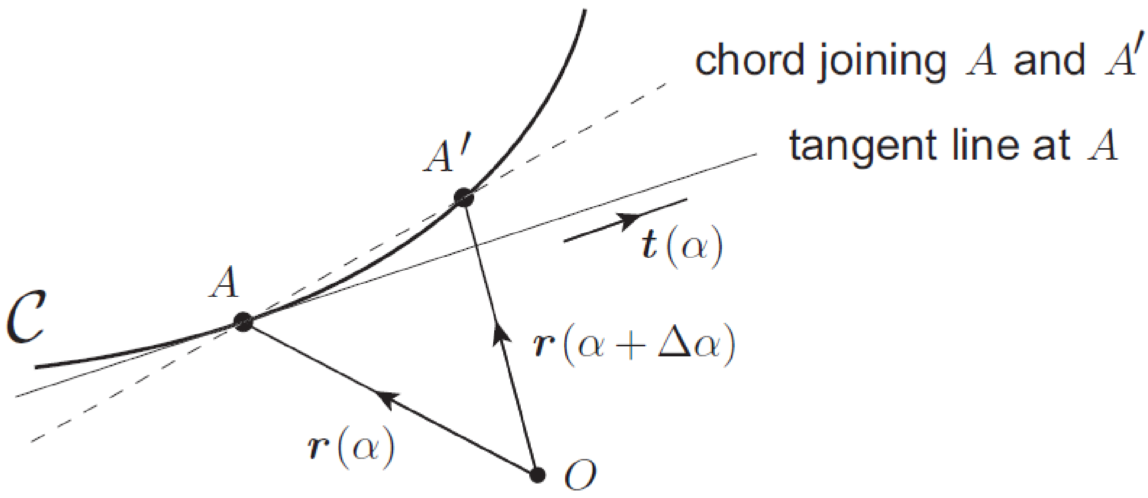
Bir Eğriye Teğet ve Dik Vektörler

Dersin ilerleyen kısmında üç boyutlu uzayda hareket eden bir parçacığın hızını ve ivmesini tanımlayacağız. Bu tanımları yorumlayabilmek için eğrilerin diferansiyel geometrisi hakkında fikir sahibi olmalıyız. Hususî olarak bir eğrinin **birim teğet** ve **birim dik** vektörlerinin ne olduğunun bilinmesi faydalı olacaktır.

Birim teğet vektör



Üstteki şekilde gösterilen ve ***r***=***r***(*α*) parametrik denklemi ile tanımlanan eğriyi ele alalım. Genel olarak bu üç boyutlu uzaydaki bir eğri olacaktır. *A*, *C* eğrisinin *α* değişkenine tekâbül eden sıradan bir noktası ve *A′* *α*+Δ*α* değişkenine tekâbül eden civarındaki bir nokta olsun. $\overrightarrow{AA'}$ kirişi aşağıdaki

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\alpha + \Delta\alpha) - \boldsymbol{r}(\alpha)$$

vektörünü temsil eder ve dolayısıyla Δ***r***/|Δ***r***| $\overrightarrow{AA'}$ kirişine paralel bir birim vektördür. *A* noktasındaki **birim teğet vektör *t***(*α*) yukarıdaki ifadenin sınır değeri olarak tanımlanır yâni

$$\boldsymbol{t}(\alpha) = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{|\Delta \boldsymbol{r}|}.$$

Teğet vektör **t**, *dr*/*dα* türevi ile ilişkilidir, zirâ

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{|\Delta \boldsymbol{r}|} \times \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta\alpha}$$
$$= \boldsymbol{t}(\alpha) \times \left| \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta\alpha} \right| = \boldsymbol{t}(\alpha) \times \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{d\alpha} \right|,$$

bu da

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\alpha} = \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{d\alpha} \right| \boldsymbol{t}(\alpha).$$

anlamına gelir. Bu formül en sâde şeklini α sabit bir noktadan ölçülen, eğri üzerindeki mesafe s olarak seçildiğinde alır. Bu durumda,

$$\left| \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta s} = 1$$

olacağından, ***t*** şu basit formülle verilir:

$$\boxed{\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}.}$$

Birim Dik Vektör

s eğri boyunca mesafeyi temsil etmek üzere, $\boldsymbol{t}(s)$ C eğrisinin birim teğet vektörü olsun. $\boldsymbol{t}$ bir birim vektör olduğundan, $\boldsymbol{t}(s)\cdot\, \boldsymbol{t}(s)=1$ olmaktadır ve bu özdeşliğin s'ye göre türevi alınırsa, şunu buluruz:

$$0 = \frac{d}{ds}(\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{t}) = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \cdot \boldsymbol{t} + \boldsymbol{t} \cdot \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$$
$$= 2\left(\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \cdot \boldsymbol{t} \right).$$

Sonuç olarak, $d\boldsymbol{t}/ds$ her zaman $\boldsymbol{t}$'ye diktir. $d\boldsymbol{t}/ds$ genellikle alttaki şekilde yazılır.

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \kappa\, \boldsymbol{n}}$$

Bu ifadede $\kappa = |d\boldsymbol{t}/ds|$ **eğrilik** denilen artı bir sıkaler ve $\boldsymbol{n}$ (aslî) **birim dik vektör** denilen birim bir vektördür. Eğrinin her noktasında, $\boldsymbol{t}(s)$ ve $\boldsymbol{n}(s)$ birim vektörleri birbirine diktir.

$\boldsymbol{n}$ ve κ niceliklerinin geometri yönünden nasıl yorumlanabileceklerini anlamak için, eğrinin üzerindeki herhangi bir *A* noktasını alalım ve mesafe değişkeni *s*'nin *A*'dan ölçüldüğünü farzedelim. O hâlde, Taylor açılımı sonucunda *A* noktası civarında *C* eğrisi şu şekli almaktadır:

$$\boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{r}(0) + s\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right]_{s=0} + \tfrac{1}{2}s^2\left[\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right]_{s=0} + O\left(s^3\right),$$

yâni

$$\boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{a} + \kappa^{-1}\left(\sin\kappa s\right)\boldsymbol{t} + \kappa^{-1}\left(1-\cos\kappa s\right)\boldsymbol{n} + O\left(s^3\right).$$

Bu denklemde, $\boldsymbol{a}$ *A* noktasının konum vektörü olup $\boldsymbol{t}$, κ ve $\boldsymbol{n}$ *A* noktasında belirlenmektedir.

$$\boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{a} + s\,\boldsymbol{t} + \left(\tfrac{1}{2}\kappa s^2\right)\boldsymbol{n} + O\left(s^3\right),$$

Dolayısıyla, *A* yakınında, *C* eğrisi *A*'dan geçen ve $\boldsymbol{t}$ ve $\boldsymbol{n}$ vektörlerini içeren düzlemde bulunur. Aynı mertebe yaklaşıklığa kadar, *A* civarında *C* eğrisinin aşağıdaki şekilde olduğu da aynı derecede doğrudur.

Binâenaleyh, *A* civarında, *C* eğrisi takrîben κ^{-1} yarıçaplı bir **çember**dir; $\boldsymbol{t}$ vektörü bu çembere teğettir ve $\boldsymbol{n}$ vektörü merkezine doğrudur. κ^{-1} yarıçapına *C*'nin *A* noktasındaki **eğrilik yarıçapı** denir.

1. Soru: Ortalama Hız ve Süratin Hesaplanması

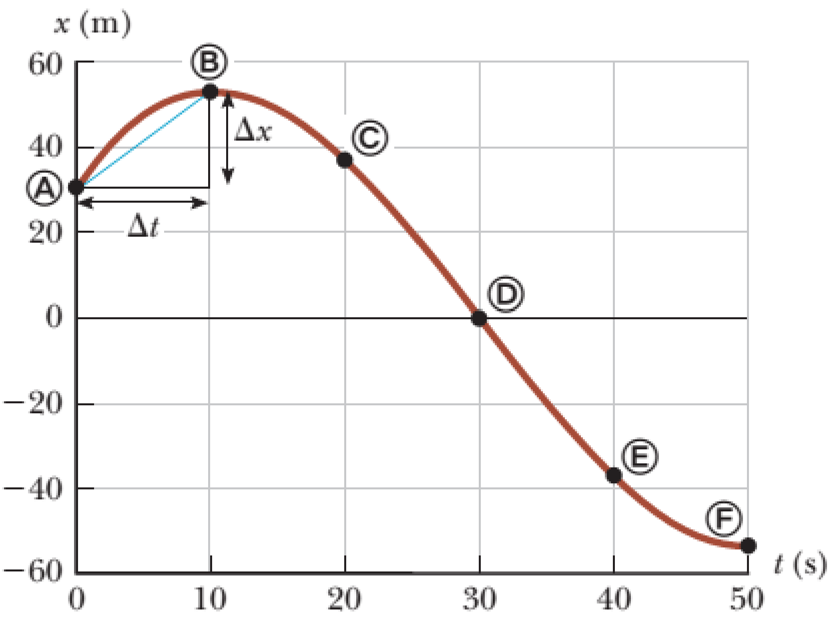
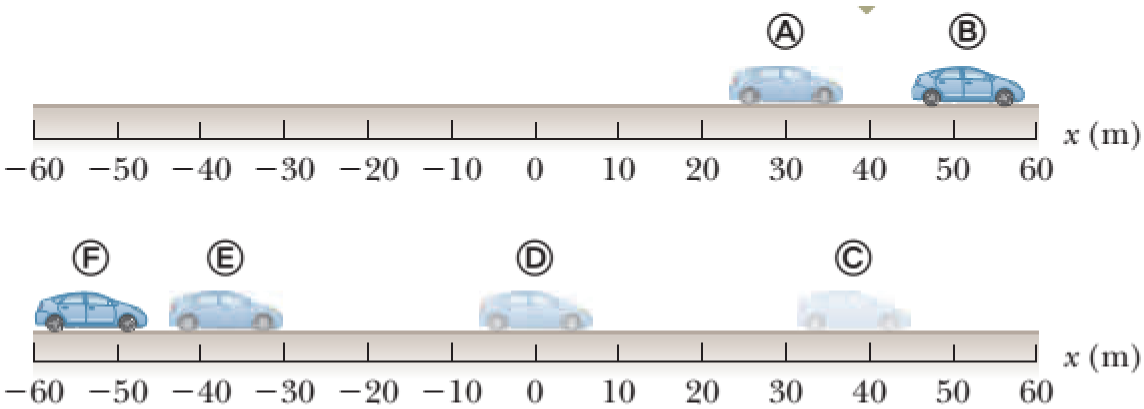


Table 2.1 **Position of the Car at Various Times**

Position	t (s)	x (m)
A	0	30
B	10	52
C	20	38
D	30	0
E	40	−37
F	50	−53



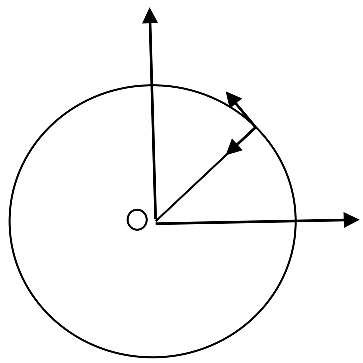
Yukarıda konum-zaman grafiği görülen arabanın A ile F noktaları arasındaki yer değiştirmesini, ortalama hız ve süratini hesaplayınız.

Çözüm: $\Delta x = x_F - x_A = -53 - 30 = \underline{-83\ m}$

$$\Delta v_{x,ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-83}{50-0} = \underline{-1{,}7\ m/s}$$

$$v_{ort} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{(x_B - x_A) + |x_F - x_B|}{\Delta t} = \frac{127}{50} = \underline{2{,}5\ m/s}$$

2. Soru: Bir çemberin teğet ve dik birim vektörlerini bulunuz.



Çözüm: $\boldsymbol{t} = \widehat{\boldsymbol{\theta}} = -sin\theta\ \hat{\boldsymbol{\imath}} + cos\theta\ \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ ve $\boldsymbol{n} = -\hat{\boldsymbol{r}} = -cos\theta\ \hat{\boldsymbol{\imath}} - sin\theta\ \hat{\boldsymbol{\jmath}}$

Şimdi aynı sonuca verilen formülleri kullanarak ulaşalım.

$\boldsymbol{r} = R(cos\theta\ \hat{\boldsymbol{\imath}} + sin\theta\ \hat{\boldsymbol{\jmath}})$ ve $s = R\theta$ olduğuna göre,

$$\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{r}/d\theta}{|d\boldsymbol{r}/d\theta|} = \frac{R(-sin\theta\ \hat{\boldsymbol{\imath}} + cos\theta\ \hat{\boldsymbol{\jmath}})}{R} = -sin\theta\ \hat{\boldsymbol{\imath}} + cos\theta\ \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

olur ki; -olması gerektiği üzere- teğet birim vektör daha önce bulduğumuz sonuçla aynıdır.

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{t}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\boldsymbol{t}/d\theta}{ds/d\theta} = \frac{-cos\theta\ \hat{\boldsymbol{\imath}} - sin\theta\ \hat{\boldsymbol{\jmath}}}{R} = (R^{-1})(-cos\theta\ \hat{\boldsymbol{\imath}} - sin\theta\ \hat{\boldsymbol{\jmath}}) \equiv \kappa\ \boldsymbol{n}$$

olur ki; -olması gerektiği şekilde- dik birim vektör yukarıda bulduğumuz sonuçla aynıdır. Eğrilik yarıçapı da tabiî ki çemberin yarıçapına eşittir. Eğrilik ise çemberin yarıçapının tersidir.