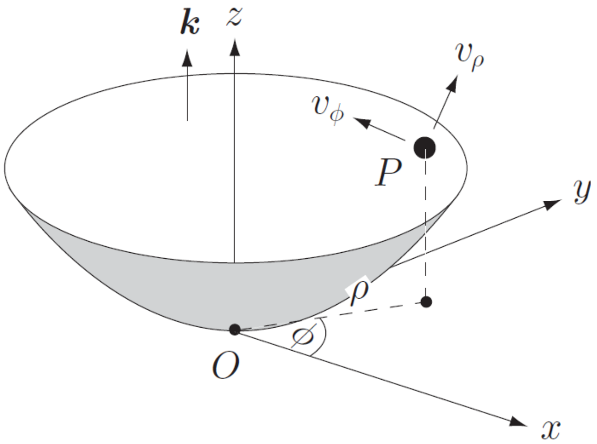
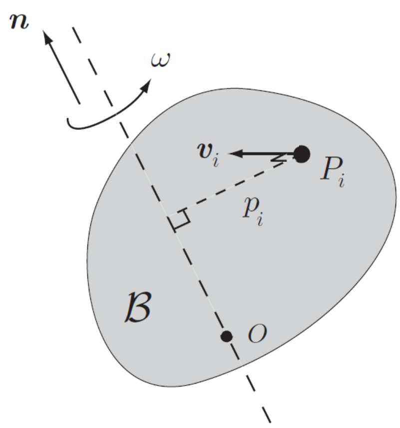
KLASİK MEKANİK 11. HAFTA UYGULAMA

1. Soru:



Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi, m kütleli bir P parçacığı, eksenel olarak simetrik bir çanağın iç yüzeyinde kaymaktadır $\left(z = f(\rho)\right)$. Şekilde gösterilen ρ, ϕ koordinatlarına göre simetri ekseni etrafındaki açısal momentumu bulunuz.

[<u>Not:</u>



Bu şekil katı bir B cisminin, ω açısal hızıyla sabit bir eksen olan $\{O, n\}$ etrafında dönüşünü göstermektedir.**]**

Çözüm: ρ ve ϕ koordinatlarına karşılık gelen v_ρ ve v_ϕ hızları yukarıdaki şekilde gösterilen yönlere sahiptir. Bu iki hız, dikey eksen $\{O, k\}$ etrafında azimut yönde v_ϕ katkısı ile diktir. Buradan takiben de, $v\hat{\phi} = v_\phi = \rho\dot{\phi}$ eşitliklerine sahip olduğumuzu söyleriz. Dolayısıyla gerekli açısal momentum;

$$L_O k = m\rho\left(v\hat{\phi}\right) = m\rho\left(\rho\dot{\phi}\right) = m\rho^2\dot{\phi}$$

şeklindedir.

Hatırlatmak gerekirse; v_ρ hızı, dışa doğru olan $\dot{\rho}$'nın ve dikey olarak yukarı doğru olan $\dot{z}$'nın toplamıdır. $\dot{z}$'nın bağımsız bir nicelik olmadığı unutulmamalıdır. Çanak için denklem; $z = f(\rho)$ olduğundan, $\dot{z} = f'(\rho)\dot{\rho}$ şeklindedir. Dolayısıyla P parçacığının kinetik enerjisi;

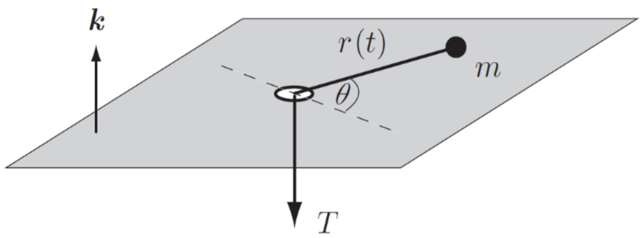
$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{\rho}^2 + (f'(\rho)\dot{\rho}\,)^2 + \left(\rho\dot{\phi}\right)^2\right]$$

eşitliği ile verilir. Ve potansiyel enerjisi ise;

$$V = mgf(\rho)$$

şeklindedir.

2. Soru:



Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi m kütleli bir P parçacığı düz yatay bir masa üzerinde kaymaktadır. P parçacığı küçük düz bir O deliğinden geçen hafif uzayamaz bir iple bağlanır, böylece ipin alt ucu masanın altına dikey olarak asılırken, P parçacığı ip gergin bir şekilde üstte hareket eder. Başlangıçta ipin alt ucu, P parçacığı a yarıçaplı bir daire üzerinde u hızıyla hareket ederken, sabit tutulur. İp masanın üzerinde t anında $r(t)$ uzunluğuna sahip olacak şekilde aşağıdan yukarı doğru çekilir. t anında P parçacığının hızını ve ipteki gerilimi bulunuz.

Çözüm: Öncelikle bu harekette açısal momentumun bazı bileşenlerinin korunduğunu tespit etmeliyiz. P parçacığına etki eden kuvvetler; yer çekimi, masanın tepki kuvveti ve ipteki gerilimdir. İlk ikisi birbirine eşit ve zıt olduğundan ve gerilme kuvveti O yönünü gösterdiğinden; $K_O = 0$ diyebiliriz. Böylelikle, ip çekilse de L_O, P parçacığının hareketinde korunur.

Şimdi L_O'yu hesaplamalıyız. Merkezi alan yörüngelerinde olduğu gibi L_O hareket düzlemine diktir ve L_O'ın korunumu, $L_O k$ eksenel açısal momentumun korunumuna eşdeğerdir. Dolayısıyla yörünge hareketinde olduğu gibi,

$$L_O k = mr^2\dot{\theta} = L\text{'dir.}$$

Burada L, başlangıç koşulları $L = mau$ ile elde edilen sabittir. Böylelikle P parçacığının hareketinde korunum denklemi;

$$mr^2\dot{\theta} = mau$$

ile verilir.

$r(t)$ verildiği için bu denklem P'nin hareketini belirlemek için yeterlidir. Özellikle, t anında P parçacığının hızı;

$$v = \dot{r}\hat{r} + (r\dot{\theta})\hat{\theta} = \dot{r}\hat{r} + \left(\frac{au}{r}\right)\hat{\theta}$$

ile verilir. Buradan da r sıfıra yönelirken, P parçacığının enine hızının sonsuza eğilimli olduğu görülebilir.

İp gerilimi T, P parçacığı için radyal hareket denkleminden bulunabilir. Yani;

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T,$$

bu da bize,

$$T = m(r\dot{\theta}^2 - \ddot{r}) = m\left(\frac{a^2u^2}{r^3} - \ddot{r}\right)$$

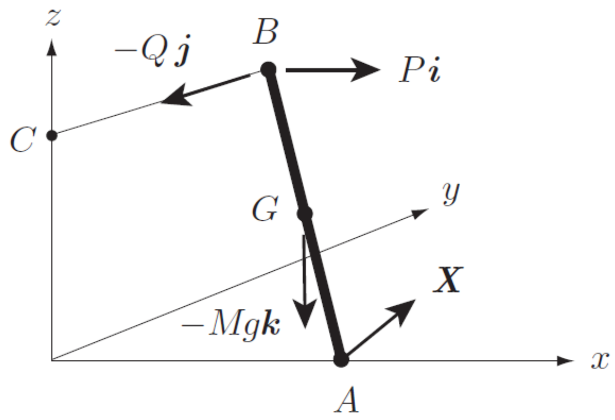
eşitliğini verir.

Örneğin, ipi sabit bir hızla aşağıya doğru çekmek için uygulanan gerilim;

$$T = \frac{ma^2u^2}{r^3}$$

olmalıdır. Burada da r sıfıra yöneldikçe, hız da sonsuza yönelir ve bu da P parçacığını delikten çekmeyi imkansız hale getirir.

3. Soru:



Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi, $z = 0$ yatay düzleminde, pürüzlü bir zemin bulunmakta ve $x = 0$ düzlemi düz bir dikey duvar tarafından işgal edilmektedir. Üniform M kütleli bir çubuğun alt ucu zeminde $(a, 0,0)$ ve üst ucu da $(0, b, c)$ noktasında duvar ile temas halindedir. Çubuğun üst ucu $(0,0, c)$ noktasına hafif uzayamaz bir ip ile bağlanarak düşmesi engellenmektedir. Çubuğun kaymadığı göz önünde bulundurularak, ipteki gerilimi ve duvarın uyguladığı reaksiyonu bulunuz.

Çözüm: Çubuğa etki eden dış kuvvetler; $P\vec{\imath}$ duvarın normal reaksiyonu, $-Q\vec{\jmath}$ ipteki gerilim kuvveti, $-Mg\vec{k}$ ağırlık kuvveti ve X zeminin reaksiyonudur. Dolayısıyla denge denklemleri;

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{W} + \vec{X} = \vec{0}$$

$$P\vec{\imath} - Q\vec{\jmath} - Mg\vec{k} + \vec{X} = \vec{0} \qquad \text{(I)}$$

$$\sum \vec{T}_A = \vec{T}_P + \vec{T}_Q + \vec{T}_W + \vec{T}_X = \vec{0};$$

$$(2L\vec{n}) \times (P\vec{\imath} - Q\vec{\jmath}) + (L\vec{n}) \times \left(-Mg\vec{k}\right) = \vec{0} \qquad \text{(II)}$$

şeklindedir. Burada $2L$ çubuğun uzunluğu ve $\vec{n}$ ise $\overrightarrow{AB}$ yönündeki birim vektörüdür. (I) denklemi, yalnızca P ve Q bilindiğinde X reaksiyonunu belirlemeye yarar. (II) denkleminden P ve Q'yu çıkarabilmek için ise bileşenleri $\vec{n}$ yönü dışında herhangi iki yönde alırız, bu yönler de en kolay seçenekler olan $\vec{\imath}$ ve $\vec{\jmath}$ yönleridir. Birim vektör, $\vec{n}$;

$$\vec{n} = \frac{-a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}}{2L}$$

ile ifade edilmektedir.

Dolayısıyla birim vektör ifadesinden faydalanarak, (II) denkleminden yola çıkarak;

$$\vec{\imath}: \qquad 2LcQ + Lb(-Mg) = 0 \qquad \rightarrow \quad Q = \frac{Mgb}{c}$$

$$\vec{\jmath}: \qquad 2LcP - La(Mg) = 0 \qquad \rightarrow \quad P = \frac{Mga}{c}$$

$$\vec{k}: \qquad 2L(aQ - bP) = 0$$

eşitlikleri elde edilir.

Böylelikle de, duvarın uyguladığı reaksiyon ve ipteki gerilim;

$$P = \frac{Mga}{2c} \qquad , \qquad Q = \frac{Mgb}{2c}$$

olarak elde edilir.