

İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi
Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü



Boğaziçi Üniversitesi Kandilli
Rasathanesi ve Deprem
Araştırma Enstitüsü



X. ULUSAL ASTRONOMİ KONGRESİ

2-6 Eylül 1996

İSTANBUL
1996

IUE TAYFLARINDAN TERMİNAL HIZ HESABI

H. Gülseçen, M.T. Özkan, T. Ak, A.T. Saygıç, H.H. Esenoğlu

İstanbul Üniversitesi Gözlemevi Araştırma ve Uygulama Merkezi
ve

İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü

Internet: istanbul @v471tau.ege.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada cüce nova ve nova benzeri 13 kataklismik değişenin CIV $\lambda 1550$ 'nin P Cygni profillerini analiz etmek için IUE veri seti kullanılıyor. Özellikle, profiller, soğurma ve salma hızları, genişlikleri ve şiddetleri kullanarak parametrize ediliyor. Kataklismik değişenlerin ölçülen rüzgar hızları, sıcak OB yıldızlarından bulunanlara göre tartışılıyor.

Anahtar kelimeler: çizgi: profiller - çift yıldızlar: yakın - moröte: yıldızlar - metodlar: veri analizi

ABSTRACT

In this work the IUE data set is used to analyze the CIV $\lambda 1550$ P Cygni profiles of 13 dwarf novae and nova-like cataclysmic variables. In particular, the profiles are parametrized using measures of the absorption and emission velocities, widths and strengths. The measured values of the wind velocity of cataclysmic variables are discussed in terms of those found from hot OB stars.

Key words: line: profiles - binaries: close - ultraviolet: stars - methods: data analysis

1. Giriş

Tanım olarak, "Kataklismik Değişen Sistem"; baş yıldızı bir beyaz cüce ile bileşen getiren bir anakol yıldızından oluşur. Kataklismik değişenlerin (KD) önemli özelliklerinden biri sistem içindeki kütle transferidir. Kütle transferi sistemin yörünge düzleminde baş yıldız etrafında bir yığılma diski oluşturur. Böyle bir disk, morötesi ve optik ışınımın temel kaynağıdır.

Manyetik olmayan KD'ler, iki gruba ayrılırlar: i) Nova Benzeri Değişenler ve ii) Cüce Novalar. Bu iki grubun etkinlik dönemlerinde disklerinden uzaya atılan maddenin varlığı ilk kez Uluslararası Moröte Uydusu (IUE) ile yapılan gözlemlerden (Guinan ve Sion 1980a ve 1980b; Hutchings 1980; Cordova ve Mason 1982) ortaya konuldu. Özellikle moröte morötesi çizgileri CIV $\lambda 1550$, SiIV $\lambda 1400$ ve NV $\lambda 1240$ çizgilerinde ortaya çıkan P-Cygni tipi profiller disklerden kaynaklanan rüzgarların belirteçleridir. Bu profillerin şekli sistemin eğimine kuvvetle bağlıdır (Cordova ve Mason 1982; Cordova ve Mason 1984; Drew 1987). Örneğin gözlenen çizgiler, eğimi 60° den küçük sistemlerde kısa dalga boylarına kaymış geniş soğurma ve P-Cygni tipi profiller olarak görülürken, kenardan görünen (büyük eğimli sistemler) parlak KD'lerin Doppler genişlemesi olan salma profilleri olarak ortaya çıkarlar. Bileşen yıldızın baş yıldız ve disk örtmesi sırasında CIV çizgisinin moröte sürekliliğinden çok daha az etkilenmesi moröte çizgisinin salındığı maddenin, diskin çok üstlerine (z doğrultusunda yukarılara) yayıldığı

gösterir (King ve ark. 1983; Cordova ve Mason 1985). Rezonans çizgilerinin diğer bir özelliği de zaman içinde çok değişken olabilmeleridir (Özkan ve ark., 1994a). Örneğin, YZ Cnc'de CIV $\lambda 1550$ çizgisi, 25 dakika içerisinde salma ağırlıklı profilden soğurma ağırlıklı profile dönüşmüştür (Drew ve Verbunt, 1988). Birçok sistemde zamana bağımlılık yörünge fazı ile ilgilidir (Drew, 1993).

KD'lerde rüzgarların oluşum mekanizması kesin bilinmiyorsa da, bu rüzgarın, diskin iç kısımlarından yayınlanan ışınının basıncı ile ortaya çıkması en popüler mekanizmadır (Prinja ve Rosen, 1995). Bu mekanizma aynı zamanda tek ve parlak OB yıldızlarındaki kütle kaybı mekanizması ile de yakından ilgilidir. Bipolar geometriyi gözönüne alarak yapay moröte çizgi hesaplamaları Drew (1987), Mauche ve Raymond (1987) ve Vitello ve Schlosman (1993) tarafından yapıldı. Bu araştırmacılar yaptıkları modelleri düşük dispersiyonlu moröte profillerine fit ederek kütle kaybı için $\sim 10^{-10} M_{\odot} \text{ yıl}^{-1}$ civarında bir değer buldular.

Bu çalışmada, 13 KD yıldızına ait düşük ayırmalı IUE tayflarından itibaren CIV $\lambda 1550$ profillerinden bulunan hızlar analiz edilmektedir. Çalışmamızda, önceki çalışmalara göre daha fazla sayıda tayf ve yıldız gözönüne alındığından ayrıntılı bir değerlendirme ile CIV çizgisini hem KD'ler hem de sıcak tek O ve B yıldızları açısından tartışmaktayız.

2. MATERYAL VE METOD

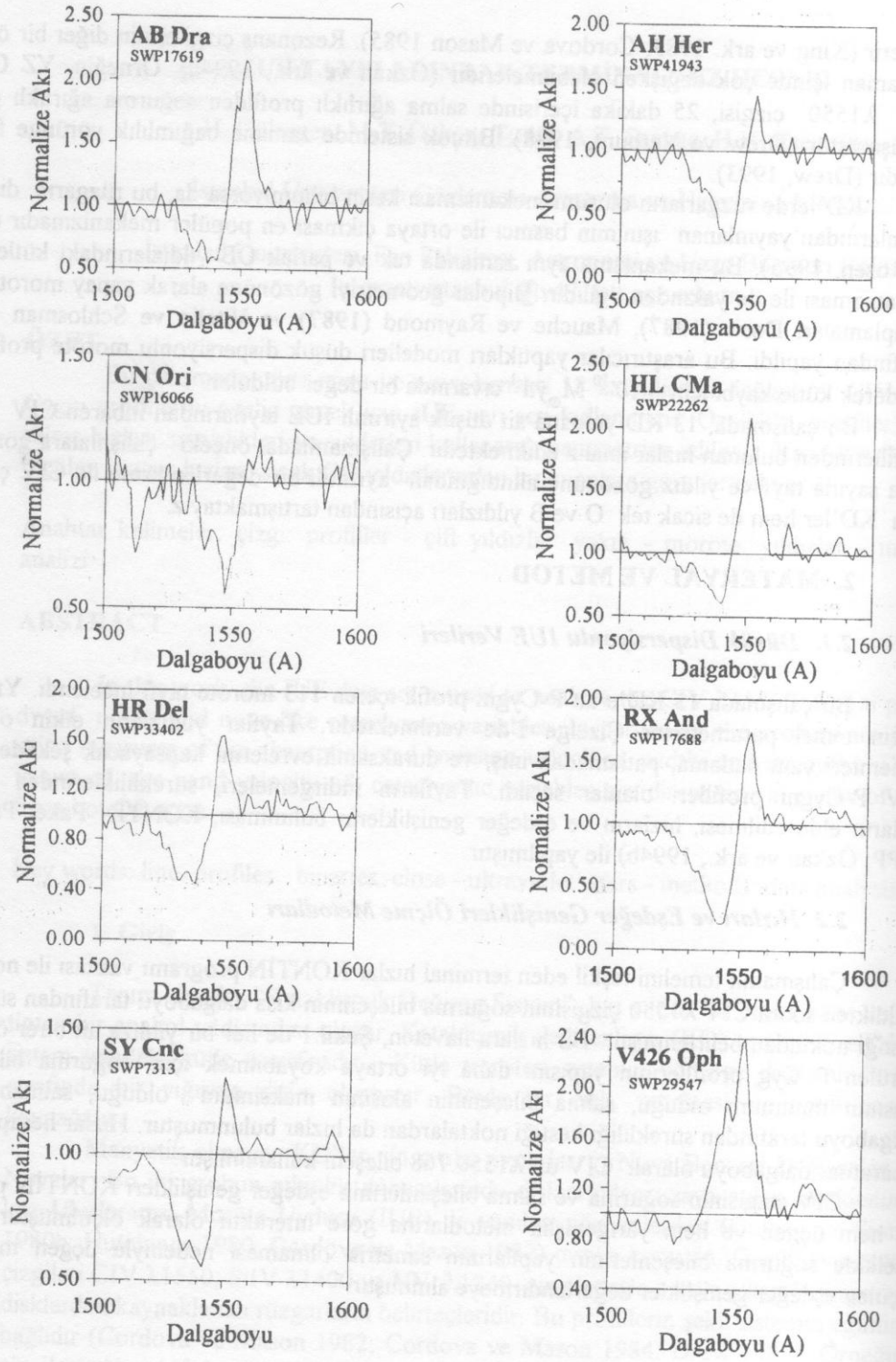
2.1. Düşük Dispersiyonlu IUE Verileri

Bu çalışmada 13 KD'e ait P-Cygni profili içeren 113 moröte tayfı incelendi. Yıldızlara ilişkin temel parametreler Çizelge I'de verilmektedir. Tayflar yıldızların etkin oldukları dönemleri yani patlama, patlamadan iniş, ve duraksama evrelerini kapsayacak şekilde sadece CIV P-Cygni profilleri olanlar seçildi. Tayfların indirgemeleri, sürekliliklerinden itibaren hızların elde edilmesi, hızların ve eşdeğer genişliklerin bulunması, KONTİN Paket Programı (KPP; Özkan ve ark., 1994b) ile yapılmıştır.

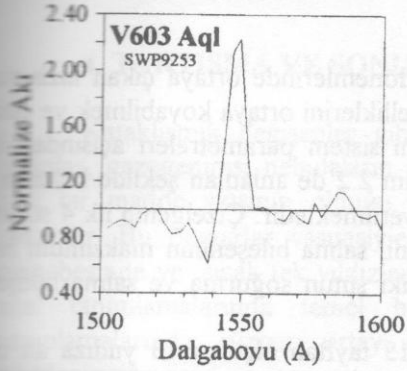
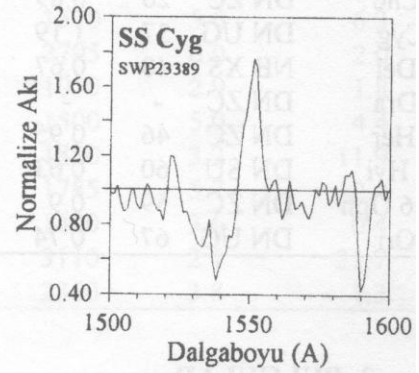
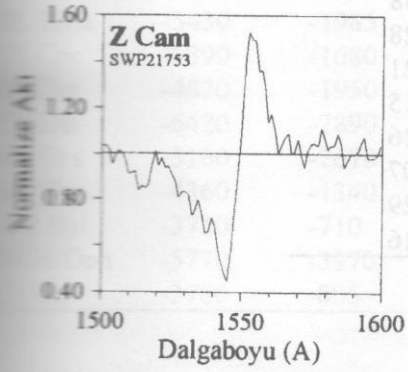
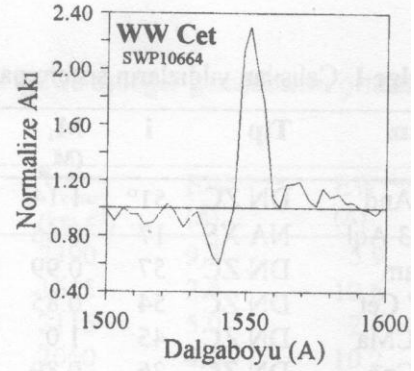
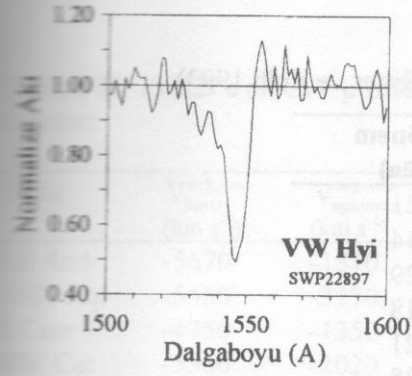
2.2. Hızları ve Eşdeğer Genişlikleri Ölçme Metodları

Çalışmanın temelini teşkil eden terminal hızlar KONTİN programı vasıtası ile normalize edildikten sonra CIV $\lambda 1550$ çizgisinin soğurma bileşeninin kısa dalgaboyu tarafından sürekliliği kestiği noktadan belirlenmiştir. Bu hızlara ilaveten, Şekil.1'de her bir yıldıza ait birer örnekleri görülen P Cyg profillerinin yapısını daha iyi ortaya koyabilmek için, soğurma bileşeninin akısının minimum olduğu, salma bileşeninin akısının maksimum olduğu, salmanın uzun dalgaboyu tarafından sürekliliği kestiği noktalardan da hızlar bulunmuştur. Hızlar hesaplanırken laboratuvar dalgaboyu olarak CIV'ün $\lambda 1550.768$ bileşeni kullanılmıştır.

CIV çizgisinin soğurma ve salma bileşenlerinin eşdeğer genişlikleri KONTİN programı ile hem üçgen ve hem yarigenişlik metodlarına göre interaktif olarak ölçülmüştür. Ancak özellikle soğurma bileşenlerinin yapılarının simetrik olmaması nedeniyle üçgen metoduyla ölçülen eşdeğer genişlikler değerlendirmeye alınmıştır.



Şekil.1. Normalize P Cygni profillerinin çalışılan yıldızlardaki birer örnekleri.



1.1. (devam) Normalize P Cygni profillerinin çalışılan yıldızlardaki birer örnekleri.

Çizelge I. Çalışılan yıldızların sistem parametreleri (Ritter ve Kolb 1993).

Yıldız	Tip	i	M ₁ (M _☉)	M ₂ (M _☉)	Dönem (Gün)
RX And	DN ZC	51°	1.14	0.48	0.21
V603 Aql	NA XS	17	0.66	0.29	0.14
Z Cam	DN ZC	57	0.99	0.70	0.29
WW Cet	DN ZC	54	0.85	0.41	0.18
HL CMa	DN ZC	45	1.0	0.45	0.21
SY Cnc	DN ZC	26	0.89	1.10	0.38
SS Cyg	DN UG	37	1.19	0.70	0.28
HR Del	NB XS	40	0.67	0.55	0.21
AB Dra	DN ZC	-	-	-	0.15
AH Her	DN ZC	46	0.95	0.76	0.26
VW Hyi	DN SU	60	0.63	0.11	0.07
V426 Oph	DN ZC	59	0.9	0.70	0.29
CN Ori	DN UG	67	0.74	0.49	0.16

3. BULGULAR

Bu çalışmada ele alınan yıldızların etkinlik dönemlerinde ortaya çıkan hızlı rüzgarları gösteren gözlemsel moröte CIV profillerinin bazı özelliklerini ortaya koyabilmek ve dolayısı ile P-Cygni profillerinin soğurma ve salma bileşenlerini sistem parametreleri açısından daha iyi analiz etmek için profillerin 4 ayrı noktasından Bölüm 2.2'de anlatılan şekilde bulunan her bir yıldıza ait hızların ortalama değerleri Çizelge II'de verilmektedir. Çizelgenin ilk 4 sütunu sırası ile terminal hızı, soğurma bileşeninin minimum hızını, salma bileşeninin maksimum hızını ve salmanın kenar hızını göstermektedir. Ayrıca, son iki sütun soğurma ve salma bileşenlerinin ortalama eşdeğer genişliklerini vermektedir.

Bu çalışmanın amaçlarından biri toplam 113 tayftan ölçülen 13 yıldıza ait ortalama hızların sistem parametreleri ile ilişkilerinin geniş çapta araştırılması idi. Burdan hareketle çalışmamızda hızların eğim açılarına, eşdeğer genişliklere, dönemlerine, toplam kütlelerine bağlılıkları ortaya konmuştur. Bu bağlılıklar Şekil.2a, b, 3 ve 4'de gösterilmiştir.

Prinja (1994) sıcak yıldızlar üzerine yaptığı bir çalışmada, düşük ve yüksek ayırma güçlü tayflardaki CIV P Cygni profillerinin ölçümlerinden

$$V_{\text{ter}} = -883 + 259 (\Delta\lambda) - 3 (\Delta\lambda)^2 \quad (1)$$

$$V_{\text{ter}} = -51 + 229 (\lambda_0 - \lambda_{\text{min}}^{\text{soğ}}) - (\lambda_0 - \lambda_{\text{min}}^{\text{soğ}})^2 \quad (2)$$

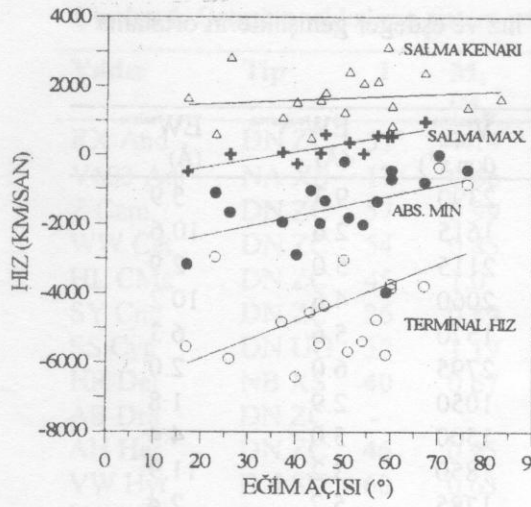
şeklinde iki bağıntı vermiştir. Bu bağıntılarda geçen V_{ter} hızı yüksek ayırmalı tayflardan elde edilen hız, $\Delta\lambda (= \lambda_{\text{mak}}^{\text{sal}} - \lambda_{\text{min}}^{\text{soğ}})$ düşük ayırmalı tayflardan bulunan salma maksimumu ve soğurma minimumu arasındaki dalgaboyu farkıdır. λ_0 1550.768 Å olarak alınmıştır. Bu bağıntıların çalışmamızdaki tayf ölçümlerine uygulayarak elde edilen sonuçlar Şekil.5a ve b'de verilmektedir.

Çizelge. II. 13 KD'e ait CIV profilinden bulunan hız ve eşdeğer genişliklerin ortalama değerleri.

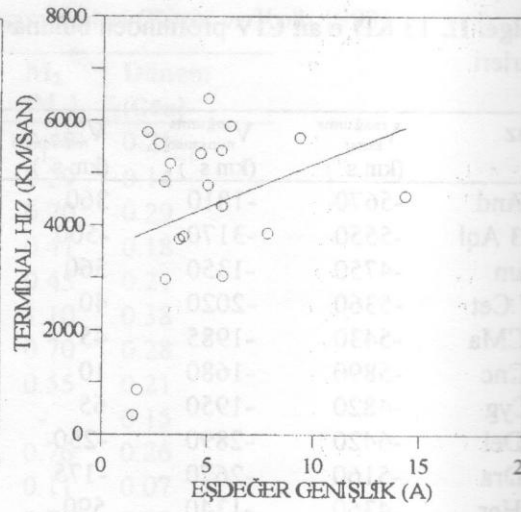
Yıldız	$V_{\text{soğurma kenar}}$ (km s^{-1})	$V_{\text{soğurma minimum}}$ (km s^{-1})	$V_{\text{salma maksimum}}$ (km s^{-1})	$V_{\text{salma kenar}}$ (km s^{-1})	$EW^{\text{soğurma}}$ ($\text{\AA}$)	EW^{salma} ($\text{\AA}$)
RX And	-5670	-1810	360	2390	9.3	5.9
V603 Aql	-5550	-3170	-500	1615	2.6	10.6
Z Cam	-4750	-1350	560	2115	5.0	2.9
WW Cet	-5360	-2020	40	2060	4.6	10.2
HL CMa	-5430	-1985	45	1570	5.6	6.3
SY Cnc	-5890	-1680	10	2795	6.0	2.0
SS Cyg	-4820	-1950	65	1050	2.9	1.8
HR Del	-6420	-2890	-250	1500	5.0	4.4
AB Dra	-5160	-2670	-175	1850	3.2	11.9
AH Her	-4360	-1340	590	1785	5.7	2.4
VW Hyi	-3730	-710	540	1400	3.6	0.4
V426 Oph	-5770	-3970	540	3110	2.1	21.7
Cn Ori	-3780	-805	970	2360	3.8	1.3

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Kataklismik değişenler gibi çift yıldızlar ve Wolf-Rayet (WR) yıldızları, OB tipi yıldızlar, gezegenimsi nebuların çekirdekleri gibi tek yıldızlardan dışarıya doğru yoğun ve hızlı bir madde akışının olduğu özellikle moröte tayflarından çok belirgin olarak ortaya konabilir. Bu rüzgarlar vasıtasıyla kütle kaybı kataklismik çift yıldızlarda $\sim 10^{-10} M_{\odot} \text{ yıl}^{-1}$ mertebesinde ve sıcak tek yıldızlarda $\sim 10^{-5} M_{\odot} \text{ yıl}^{-1}$ civarında olmaktadır. Yıldız rüzgarlarının nitel tanımlamalarında temel bir parametre terminal hızdır. Örneğin, kütle kaybı hesaplamalarında, rüzgarı ortaya çıkaran mekanizmalarda, yıldızlararası ortama karışan maddenin enerjisini ve momentumunu bulmada terminal hızların doğru bilinmesi önemlidir. Bu nedenle güvenilir hızları bulabilmek içinde çok sayıda yıldıza ait yüksek ayırma güçlü tayflar gereklidir. Ancak IUE uydusu ile KD'leri içeren ve yüksek ayırma gücünde alınan tayflar yeterince olmakla beraber, çeşitli sorunların çözümüne yönelik gözlemler yapıldığından bu açığı kapamak üzere aynı zamanda düşük ayırmalı tayflardan da yararlanmak en azından şimdilik yerinde olacaktır. Literatüre bakıldığında görülür ki şimdiye kadar terminal hızların profillerden bulunması çeşitli çalışmalarda yapılmakla beraber kullanılan tayf sayısı çok azdır. Devam eden bir proje çerçevesinde sunduğumuz bu çalışmada hem incelenen yıldız sayısı hem de kullanılan düşük ayırmalı tayf sayısı yeterince çoktur. Zaten projenin devamında KD'lere ait yüksek ayırmalı tayflarda gözönüne alınacaktır.



Şekil.2a. Her bir sisteme ait P Cygni profili bileşenlerinden bulunan hızların eğimin bir fonksiyonu olarak değişimi.

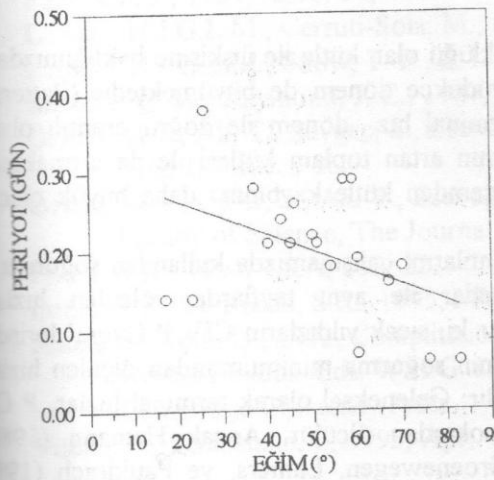


Şekil.2b. C IV'ün soğurma bileşenlerinden ölçülen terminal hızların yine aynı bileşene ait eşdeğer genişliklerine göre değişimi.

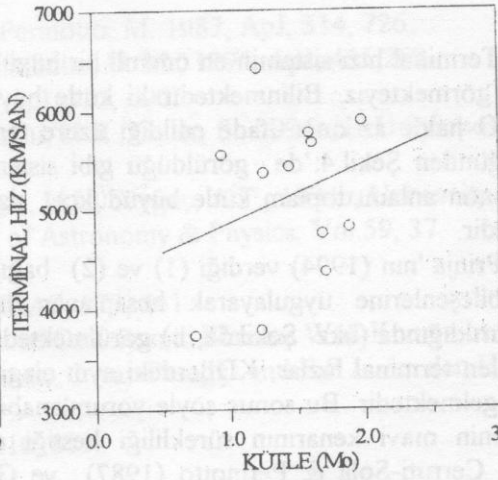
Bu çalışmada esas olarak P Cygni bileşenlerinden ölçülen hızlar, sistem parametreleri açısından ele alınmış ve gerek KD'ler gerekse sıcak tek yıldızlarda CIV'e ilişkin yapılan çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Varılan sonuçlar şöyledir:

Daha önceki çalışmalardan (Cordova ve Mason 1982; Cordova ve Mason 1984; Drew 1987) CIV P Cygni profillerinin şekilleri sistemin eğimine bağlı olarak değiştiği bilinmesine rağmen 13 KD için profilden ölçülen hızların doğrudan eğim açısına göre değişimini ayrıntılı olarak burada incelemekteyiz. Ayrıca Prinja ve Rosen'in (1995) yüksek ayırmalı tayfın dayanarak 10 KD için yaptığı çalışmanın sonuçlarını da gözönüne alıyoruz. Bu çalışmadaki yıldız (SS Cyg, VW Hyi, ve Z Cam) bizim burada incelediğimiz yıldızlar içindedir. Böylece bu çalışmadan toplam 20 KD için ortaya çıkan hız-eğim ilişkisinin verildiği Şekil.2a'dan açıkça görülmektedir ki eğim büyüdükçe soğurma profillerinden elde edilen hızlar küçülmeğe ve salma bileşenlerinden elde edilen ise tersine artmaktadır. Buna bağlı olarak soğurma bileşeninin eşdeğer genişliği küçüldükçe (eğim büyük) terminal hız küçülmeğe (bkz Şekil.2b). Dolayısıyla bu sonuç yukarıdaki çalışmaları başka bir açıdan desteklemektedir.

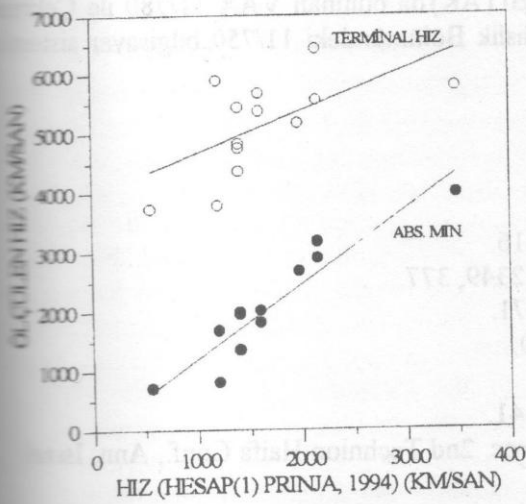
Yine bu çalışmada ortaya konulan gözlemsel diğer bir sonuç da şöyle: sistemlerin eğim açıları küçülürken dönemlerin büyüdüğü Şekil.3'den açık bir biçimde görülmektedir. Böylece eğim-hız ve eğim-dönem ilişkisinden sistemin dönemi büyüdükçe terminal hızın arttığı anlamaktayız. Diğer bir deyişle küçük dönemli sistemlerde rüzgarlarla kütle kaybı daha az olmaktadır. Örneğin dönemleri daha uzun olan Z Cam türü cüce novalarda kütle kaybı, dönemleri daha kısa diğer bir alt grup olan SU UMa'lardan daha büyüktür (Cannizzo ve Pudritz 1988).



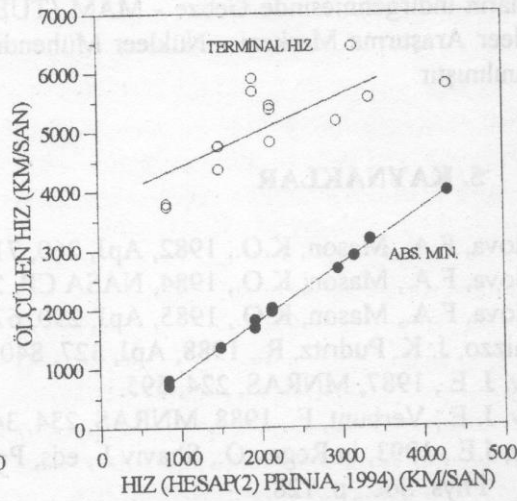
Şekil.3. Çalışılan sistemlere ait eğim-periyot ilişkisi.



Şekil.4. Terminal hızların sistemlerin toplam kütlelerine bağlılığı.



Şekil.5a. Soğurma bileşeninin kontinyumla kesişme noktası ve akının minimum olduğu noktadan ölçülen hızların Prinja (1994)'deki 1. bağıntısından bulunan hızlarla karşılaştırılması.



Şekil.5b. Şekil.5a'daki gibi terminal ve minimum hızların bu sefer Prinja (1994)'deki 2. bağıntısına göre hesaplanan hızlarla karşılaştırılması.

Terminal hızı sistemin en önemli bir büyüklüğü olan kütle ile ilişkisine baktığımızda özelliği görmekteyiz. Bilinmektedir ki kütle büyüdükçe dönem de büyümektedir (Patterson 1984). O halde az önce ifade edildiği üzere terminal hız dönem ile doğru orantılı olarak büyüdüğünden Şekil.4.'de görüldüğü gibi sistemin artan toplam kütlesi ile de artmaktadır. Yani bunun anlamı toplam kütle büyüdükçe sistemden kütle kaybının daha büyük olacağı şeklindedir.

Prinja 'nın (1994) verdiği (1) ve (2) bağıntılarını çalışmamızda kullanılan soğurma ve salma bileşenlerine uygulayarak hesaplanan hızlar ile aynı tayflardan ölçülen hızları karşılaştırıldığında (bkz. Şekil.5a, b) görülmektedir ki, sıcak yıldızların CIV P Cygni' lerinde elde edilen terminal hızlar, KD'lerdeki aynı çizginin soğurma minimumundan ölçülen hızları karşılık gelmektedir. Bu sonuç şöyle yorumlanabilir: Geleneksel olarak terminal hızlar, P Cyg profillerinin mavi kenarının sürekliliği kestiği noktadan ölçülür. Ancak Hamann (1980), Lamers, Cerruti-Sola & Perinotto (1987) ve Groenewegen, Lamers, ve Pauldrach (1989) yaptıkları çalışmalarda, sıcak O ve B yıldızlarının rüzgarlarında şokların neden olduğu kuantal hareketlerden dolayı terminal hızın kesim noktasından değil, soğurma bileşeninin minimumunun yukarıya doğru kıvrıldığı noktadan ölçülmesinin gerektiğini vurgulamışlar ve daha sonra yapılan çalışmalarda (Prinja 1994 ; Lamers ve ark. 1995) bu kurala uyulmuş ölçümler yapılmıştır. Dolayısı ile bu hızların KD'lerde mavi bileşenin minimumundaki hızla yakın çıkması normaldir.

Teşekkür

Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Araştırma Fonunca desteklenmiştir. Proje No: 789/13/1285. Tayfların indirgenmesinde Gebze - MAM (TÜBİTAK)'da bulunan VAX 11/780 ile Çekirdek Nükleer Araştırma Merkezi - Nükleer Mühendislik Bölümündeki 11/750 bilgisayar sistemleri kullanılmıştır.

5. KAYNAKLAR

- Cordova, F.A., Mason, K.O., 1982, ApJ, 260, 716.
Cordova, F.A., Mason, K.O., 1984, NASA CP, 2349, 377.
Cordova, F.A., Mason, K.O., 1985, ApJ, 290, 671.
Cannizzo, J. K. Pudritz, R., 1988, ApJ, 327, 840.
Drew, J. E., 1987, MNRAS, 224, 595.
Drew, J. E., Verbunt, F., 1988, MNRAS, 234, 341.
Drew, J.E., 1993, in Regev O., Shaviv J., eds, Proc. 2nd Technion Haifa Conf., Ann. Israel Phys. Soc., p. 128.
Groenewegen, M. A. T., Lamers, H.J.G.L.M., & Pauldrach, A. W. A. 1989, A&A, 221, 78.
Guinan, E.F., Sion, E.M., 1980a, NASA CP, 2171, 471.
Guinan, E.F., Sion, E.M., 1980b, NASA CP, 2171, 477.
Hutchings, J.B., 1980, PASP, 92, 458.
Hamann, W.R. 1980, A&A, 84, 342.
Klare, G., Krautter, J., Wolf, B., Stahl, O., Vogt, N., Wargau, W., Rahe, J., 1982, A&A, 111, 78.
King, A. R., Jameson, F. J. & Sherrington, M. R., 1983, MNRAS, 203, 677.

- Patterson, J., 1984, ApJS, 54, 443.
 Lamers, H.J.G.L.M., Cerruti-Sola, M., Perinotto, M. 1987, ApJ, 314, 726.
 Lamers, H.J.G.L.M., Snow, T. P., & Lindholm, D. M., 1995, ApJ, 455, 269.
 Mauche, C. W., Raymond, J. C., 1987, ApJ, 323, 690.
 Özkan, M.T., Ak, T., Saygıç, S., Esenoğlu, H.H., Güler, S., 1994a, IAU Symposium 165, S165.CV.107, P95.
 Özkan, M.T., Güler, S., Ak, T., Esenoğlu, H.H., Saygıç, A.T., 1994b, University of Istanbul, Faculty of Science, The Journal of Astronomy & Physics, Vol.59, 37.
 Prinja, R.K., 1994, A&A, 289, 221.
 Prinja, R.K., ve Rosen, S.R., 1995, MNRAS, 273, 461.
 Ritter, H., Kolb, U., 1993, Complitation of Cataclysmic Binaries With Known or Suspected Orbital Periods. Eds. W.H.G. Lewin, J. van Paradijs and E.P.J. van den Heuvel Cambridge University Press.
 Vitello, P., Schlosman, I., 1993, ApJ, 410, 815.

ELLIPTIC RADIATION BEAM AND

LUMINOSITY LAW OF PULSARS

I.M.Yalçın^{1,2} and M.E.Özkan^{1,2}

¹Department of Physics, Istanbul University, Istanbul, Turkey

²Department of Physics, Istanbul University, Istanbul, Turkey

Received 15 October 1996

Abstract

Considering the elliptical form of the radiation beam, the values

of inclination angles between the rotation and magnetic axes are calculated.

160 pulsars with the available spectral and polarization data are calculated. It is shown

that the radio luminosity can be described by the relation $L \propto A^2 \sin^2 \alpha$.

Key words: Pulsars, General—Pulsar evolution—Pulsars

1. Introduction

The luminosity law of pulsars considered in the literature recently, several

type of luminosity laws such as the simple $L \propto \dot{E}$ (Gunn and Ostriker 1969), where $\dot{E}$

is the magnetic field, also as composite relations (Stollman 1987) and (Mazurek and

Gunn 1990) have been proposed. In late investigations the luminosity is calculated by

two or three relations. This investigation based on the luminosity's calculated by

the Taylor and Manchester (1972) relation:

$$L = \pi^2 (We)^2 d^2 \sin^2 \alpha \quad (1)$$

$$L = \pi^2 (We)^2 d^2 \sin^2 \alpha \quad (2)$$

$$L = \pi^2 (We)^2 d^2 \sin^2 \alpha \quad (3)$$

$$L = \pi^2 (We)^2 d^2 \sin^2 \alpha \quad (4)$$

$$L = \pi^2 (We)^2 d^2 \sin^2 \alpha \quad (5)$$

$$L = \pi^2 (We)^2 d^2 \sin^2 \alpha \quad (6)$$

$$L = \pi^2 (We)^2 d^2 \sin^2 \alpha \quad (7)$$

$$L = \pi^2 (We)^2 d^2 \sin^2 \alpha \quad (8)$$

$$L = \pi^2 (We)^2 d^2 \sin^2 \alpha \quad (9)$$

$$L = \pi^2 (We)^2 d^2 \sin^2 \alpha \quad (10)$$

$$L = \pi^2 (We)^2 d^2 \sin^2 \alpha \quad (11)$$

$$L = \pi^2 (We)^2 d^2 \sin^2 \alpha \quad (12)$$

$$L = \pi^2 (We)^2 d^2 \sin^2 \alpha \quad (13)$$

$$L = \pi^2 (We)^2 d^2 \sin^2 \alpha \quad (14)$$