

# Genel Fizik

Doç. Dr. Hasan H. Esenoğlu

2019

# İçerik

1. Fizik ve Ölçme; Temel Büyüklükler; Kütle, zaman ve uzunluk; Birimler ve Boyut Analizi; Büyüklük mertebesi ve anlamlı rakamlar
2. Vektörler; vektörlerin toplanması ve çarpımı
3. Bir boyutta hareket, Yer değiştirme, Hız ve İvme, Serbest düşme
4. İki boyutta hareket , Eğik atış ve dairesel hareket
5. Newton Hareket Yasaları

Vize Haftası

6. Sürtünme kuvvetleri ve Newton yasalarının uygulamaları, İş ve kinetik enerji
7. Potansiyel Enerji ve Enerjinin korunumu, Doğrusal momentum ve çarpışmalar, momentumun korunumu
8. Katı Cismin Sabit Bir Eksen Etrafında Dönmesi, Eylemsizlik momenti
9. Yuvarlanma Hareketi , Dönme Enerjisi, Açısal Momentum ve Tork
10. Statik ve Denge
11. Titreşim Hareketi
12. Akışkanlar Mekaniği

Final Haftası

# Ayrıntılı İçerik

## Doğrusal momentum ve çarpışmalar, momentumun korunumu

Kütle Merkezi

Katı Cisimlerin Kütle Merkezi

Parçacık Sistemlerinde Newton'un İkinci Yasası

Çizgisel Momentum

Parçacık Sistemlerinin Çizgisel Momentumu

Çarpışma ve İtme

Seri Çarpışmalar

Çizgisel Momentumun Korunumu

Çarpışmalarda Momentum ve Kinetik Enerji

Bir-Boyutta Esnek Olmayan Çarpışma

Bir-Boyutta Tamamen Esnek Olmayan Çarpışma

Bir-Boyutta Esnek Çarpışma

Esnek Çarpışmada Özel Durum ( $\vec{v}_{2i} = 0$ )

İki-Boyutta Çarpışma

Değişken Kütleli Sistemler (Roketler)

# Doğrusal momentum ve çarpışmalar, momentumun korunumu

Bu bölümde aşağıdaki konulara değinilecektir:

Bir parçacık sisteminin kütle merkezi

Kütle merkezinin hızı ve ivmesi

Bir parçacığın ve parçacık sistemlerinin çizgisel momentumu

Kütle merkezinin nasıl hesaplanacağını ve çizgisel momentumun korunumu ilkesini öğreneceğiz.

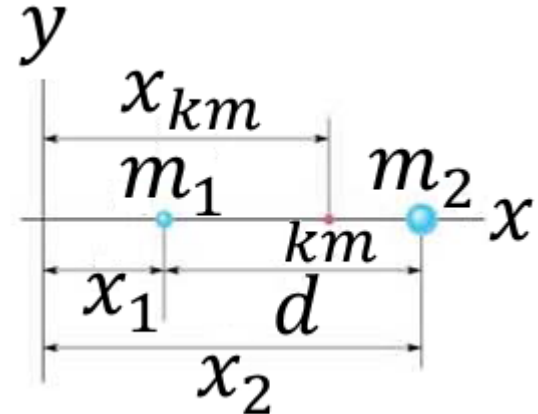
Son olarak, çizgisel momentumun korunum ilkesi yardımıyla bir ve iki boyutta çarpışma problemlerini çözeceğiz.

# Kütle Merkezi

$x$ -ekseni üzerinde  $x_1$  ve  $x_2$  noktalarında bulunan, sırasıyla,  $m_1$  ve  $m_2$  kütlelerine sahip iki noktasal cismin kütle merkezi,

$$x_{km} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

bağıntısı ile verilir.

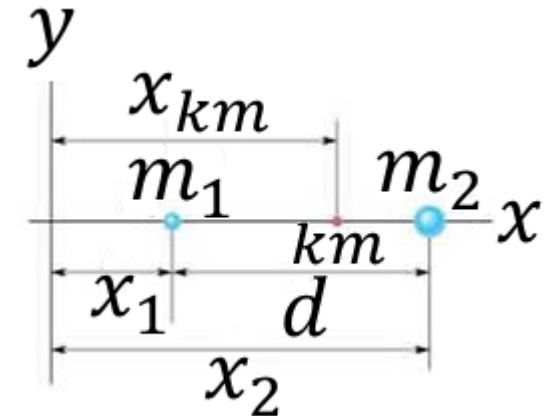


$x$ -ekseni üzerine yerleştirilmiş  $n$  tane parçacık durumunda bu bağıntı:

$$x_{km} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$$

$$\rightarrow x_{km} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

olur.



Burada  $M$  sistemdeki parçacıkların toplam kütlesidir.

Üç-boyutlu uzayda ( $xyz$ -koordinat sistemi) parçacık sisteminin kütle merkezi de, kütlesi  $m_i$  olan parçacığın konum vektörü  $\vec{r}_i$  olmak üzere, daha genel bir ifade olan

$$\vec{r}_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

bağıntısına sahiptir.

$$x_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

Konum vektörü  $\vec{r}_{km} = x_{km}\vec{i} + y_{km}\vec{j} + z_{km}\vec{k}$  biçiminde de yazılabileceğinden, kütle merkezinin koordinatları

$$x_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

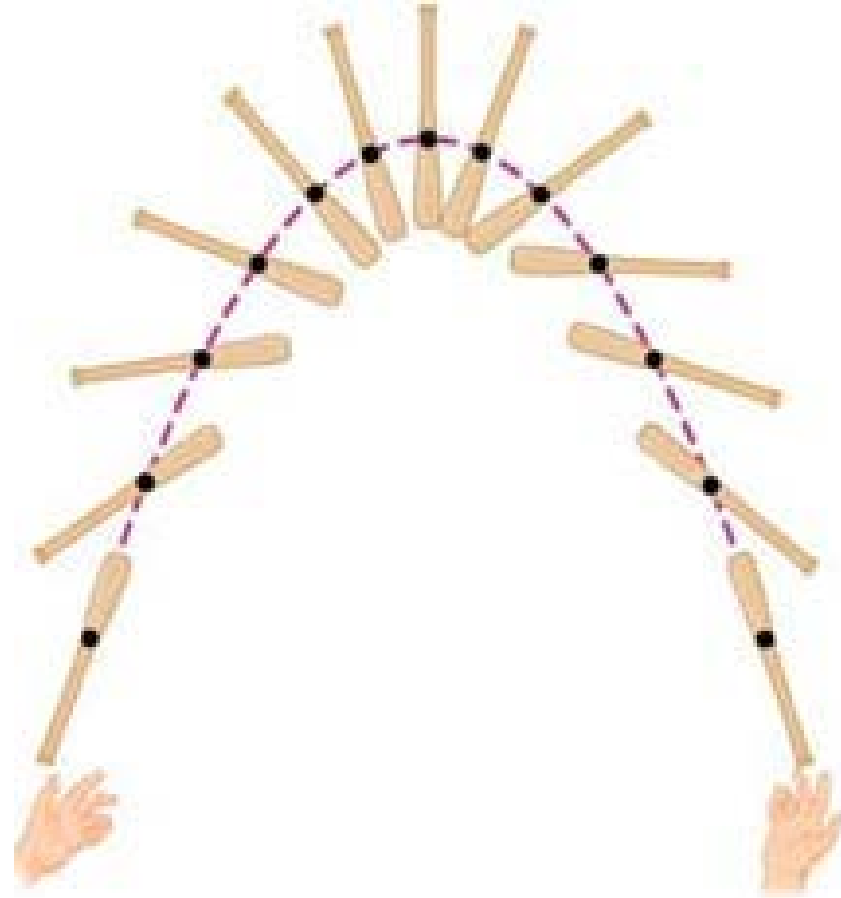
$$y_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

$$z_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

ile verilebilir.

$$\vec{r}_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$
$$x_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

Bir parçacık sisteminin kütle merkezi, sistemdeki tüm parçacıkların toplandığı bir nokta ve sistem üzerine etki eden tüm dış kuvvetler o noktaya etkiyormuş gibi düşünülebilir.



$$\vec{r}_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$
$$x_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

Bir beyzbol sopasının şekildeki gibi havaya fırlatıldığını ve yerçekimi kuvvetinin etkisi altındaki hareketini düşünelim. Sopanın kütle merkezi siyah bir nokta ile işaretlenmiştir. Kütle merkezinin hareketine bakıldığında, bunun bir eğik atış hareketi olduğu kolayca görülür.

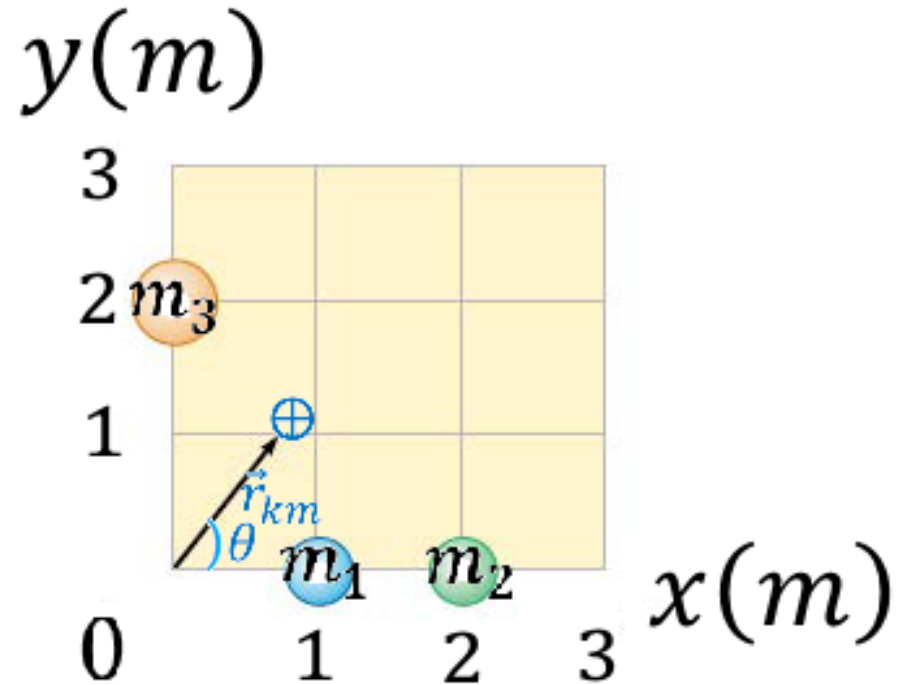


$$\vec{r}_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$
$$x_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

Ancak, kütle merkezi dışındaki noktaların hareketleri oldukça karmaşıktır.

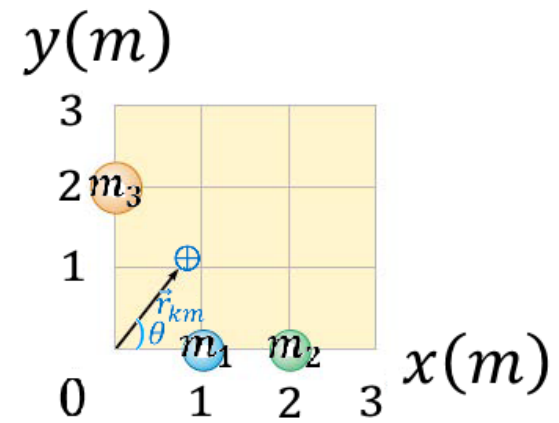
# Örnek

Konumları şekilde verilen  $m_1 = m_2 = 1.0 \text{ kg}$  ve  $m_3 = 2 \text{ kg}$  kütleli üç parçacıktan oluşan sistemin kütle merkezini ( $\vec{r}_{km} = ?$ ) bulunuz.



# Çözüm

$$(m_1 = m_2 = 1 \text{ kg} ; m_3 = 2 \text{ kg} ; \vec{r}_{km} = ?)$$



$$x_{km} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 0}{1 + 1 + 2} = 0.75 \text{ m}$$

$$y_{km} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1 \times 0 + 1 \times 0 + 2 \times 2}{1 + 1 + 2} = 1 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{km} = x_{km} \vec{i} + y_{km} \vec{j} = 0.75 \vec{i} + 1 \vec{j} \text{ m}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{0.75} \rightarrow \theta = 53.1^\circ$$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

$$y_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

$$\vec{r}_{km} = x_{km} \vec{i} + y_{km} \vec{j} + z_{km} \vec{k}$$

# Örnek

$xy$ -düzlemindeki konumları  $\vec{r}_1 = 12j \text{ cm}$ ,  $\vec{r}_2 = -12\vec{i} \text{ cm}$  ve  $\vec{r}_3 = 12\vec{i} - 12j \text{ cm}$  olan cisimlerin kütleleri de sırasıyla,  $m_1 = 0.4 \text{ kg}$  ve  $m_2 = m_3 = 0.8 \text{ kg}$  ile veriliyor. Sistemin kütle merkezini ( $\vec{r}_{km} = ?$ ) bulunuz.

# Çözüm

( $\vec{r}_1 = 12\vec{j} \text{ cm}$  ;  $\vec{r}_2 = -12\vec{i} \text{ cm}$  ;  $\vec{r}_3 = 12\vec{i} - 12\vec{j} \text{ cm}$  ;  $m_1 = 0.4 \text{ kg}$  ;  $m_2 = m_3 = 0.8 \text{ kg}$  ;  $\vec{r}_{km} = ?$ )

$$x_{km} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{0.4 \times 0 + 0.8 \times (-12) + 0.8 \times 12}{0.4 + 0.8 + 0.8} = 0$$

$$y_{km} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{0.4 \times 12 + 0.8 \times 0 + 0.8 \times (-12)}{0.4 + 0.8 + 0.8} = -2.4 \text{ cm}$$

$$\vec{r}_{km} = x_{km}\vec{i} + y_{km}\vec{j} = -2.4\vec{j} \text{ cm}$$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

$$y_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

$$\vec{r}_{km} = x_{km}\vec{i} + y_{km}\vec{j} + z_{km}\vec{k}$$

# Katı Cisimlerin Kütle Merkezi

Maddenin, içinde homojen bir şekilde dağıldığı sistemlere **katı cisim**ler diyebiliriz. Böyle cisimlerin kütle merkezlerini bulmak için, kesikli toplama işlemi yerine sürekli toplama işlemi olan integrali kullanacağız:

$$x_{km} = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

$$y_{km} = \frac{1}{M} \int y \, dm$$

$$z_{km} = \frac{1}{M} \int z \, dm$$

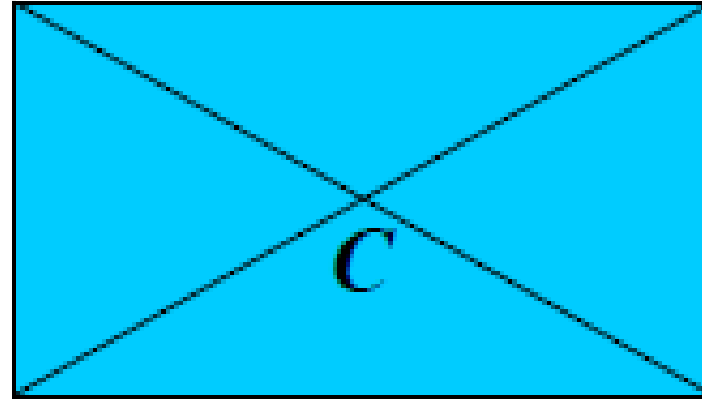
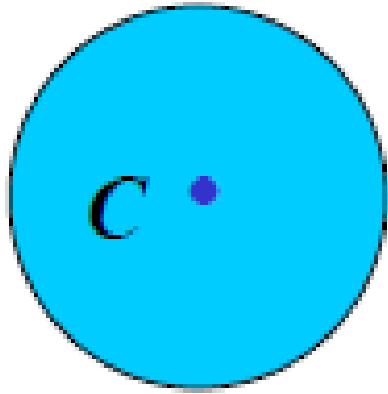
$$x_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

$$y_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

$$z_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

Cisimlerin simetrisi (simetri **noktası**, simetri **ekseni**, simetri **düzlemi**) uygun ise integral alma işlemine gerek kalmayabilir. Kütle merkezi simetri elemanı üzerinde olacaktır.

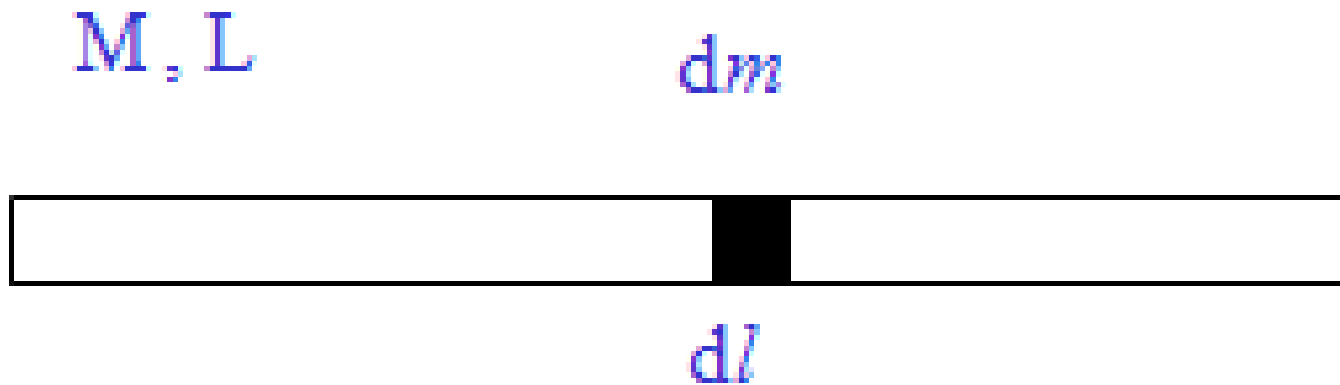
Örneğin bir **küre**nin kütle merkezi, kürenin merkezidir.



Bir **dikdörtgen**in kütle merkezi, karşılıklı köşegenleri birleştiren doğruların kesişim noktasıdır.

Katı cisim  $L$  uzunluğuna ve  $M$  kütlesine sahip bir **çubuk** ise, **kütle yoğunluğu çizgiseldir**:

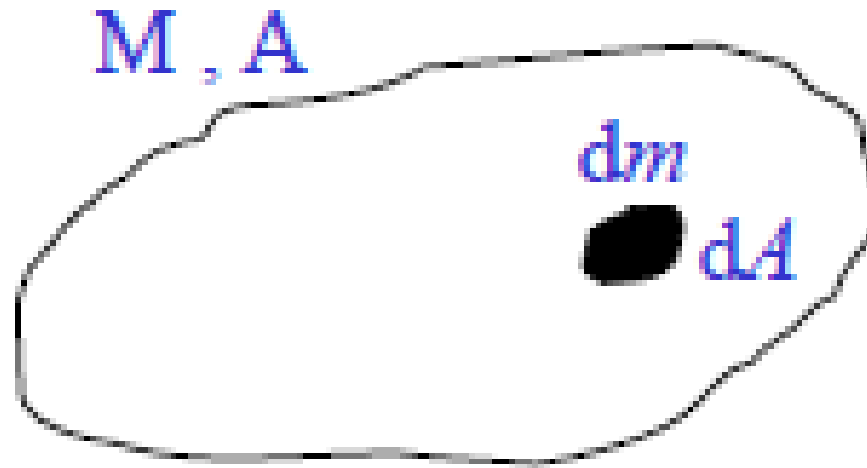
$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{M}{L} \rightarrow x_{km} = \frac{1}{M} \int x \lambda dl$$



$$x_{km} = \frac{1}{M} \int x dm$$

Katı cisim  $A$  yüzey alanına ve  $M$  kütlesine sahip ince bir **plaka** ise, **kütle yoğunluğu yüzeyseldir**:

$$\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{A} \rightarrow x_{km} = \frac{1}{M} \int x \sigma dA$$



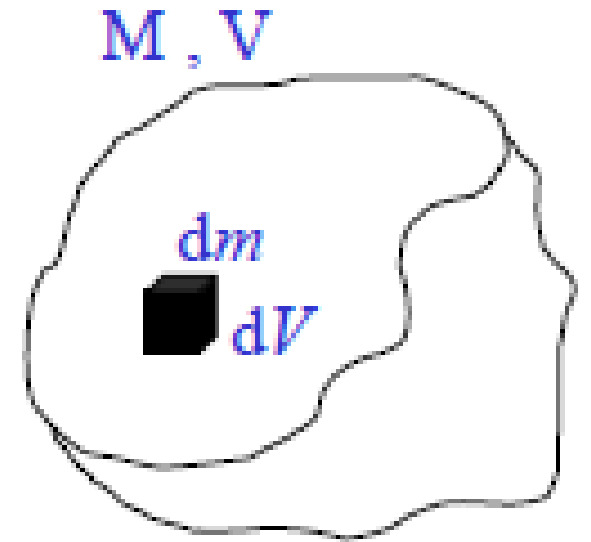
$$x_{km} = \frac{1}{M} \int x dm$$

Katı cisim  $V$  hacmine ve  $M$  kütlesine sahip ise, kütle yoğunluğu hacimseldir:

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V} \rightarrow x_{km} = \frac{1}{M} \int x \rho dV$$

$$y_{km} = \frac{1}{M} \int y \rho dV$$

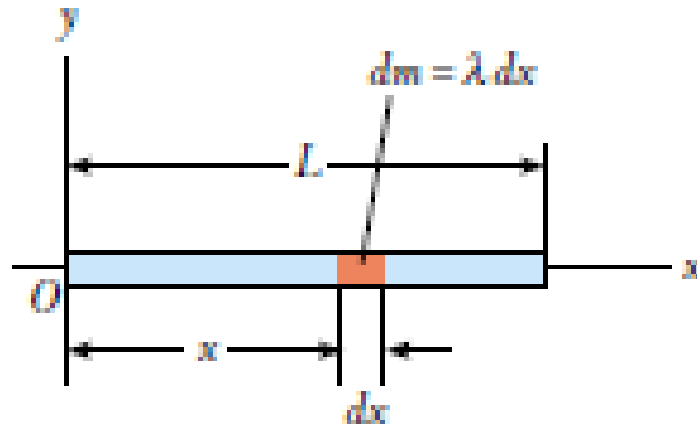
$$z_{km} = \frac{1}{M} \int z \rho dV$$



$$x_{km} = \frac{1}{M} \int x dm$$

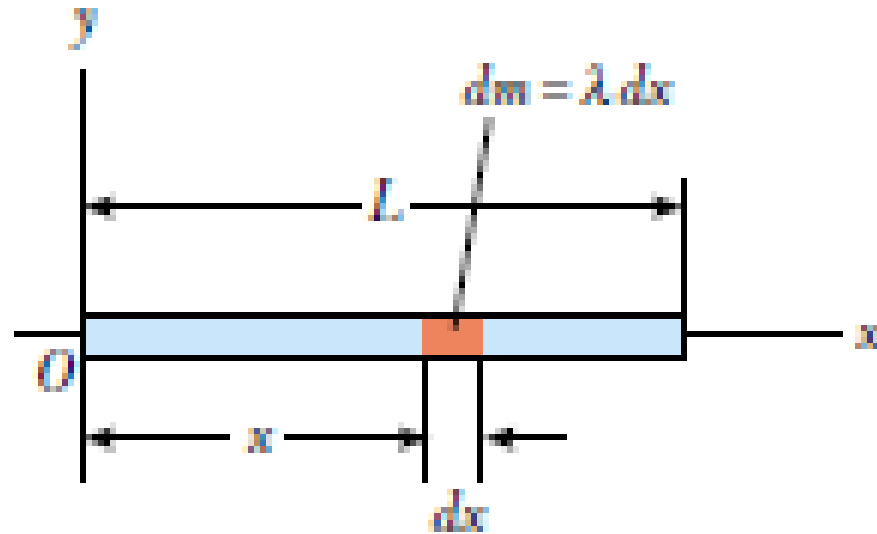
# Örnek

- a) Kütlesi  $M$  ve uzunluğu  $L$  olan homojen bir çubuğun kütle merkezini ( $x_{km}$ ) bulunuz.
- b) Çubuğun çizgisel kütle yoğunluğu  $\lambda = ax$  ise, kütle merkezini ( $x_{km}$ ) bulunuz ( $x$  çubuğun sol ucundan olan uzaklık ve  $a$  da bir sabittir).



Çözüm ( $x_{km} = ?$ )

$$\text{a) } x_{km} = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda \, dl = \frac{\lambda}{2M} \left| x^2 \right|_0^L = \frac{ML^2}{2ML} = \frac{L}{2}$$



$$\lambda = \frac{M}{L}$$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \int x \lambda \, dl$$

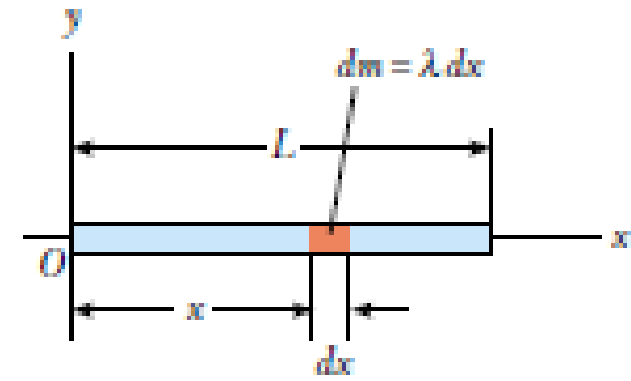
$$x_{km} = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

Çözüm ( $\lambda = ax$  ;  $x_{km} = ?$ )

$$b) \quad x_{km} = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda \, dl = \frac{a}{M} \int_0^L x^2 \, dl = \frac{a}{3M} |x^3|_0^L = \frac{aL^3}{3M}$$

$$M = \int_0^L \lambda \, dx = a \int_0^L x \, dx = \frac{a}{2} |x^2|_0^L = \frac{aL^2}{2}$$

$$\rightarrow x_{km} = \frac{2aL^3}{3aL^2} = \frac{2}{3}L$$



$$\lambda = \frac{dm}{dl}$$

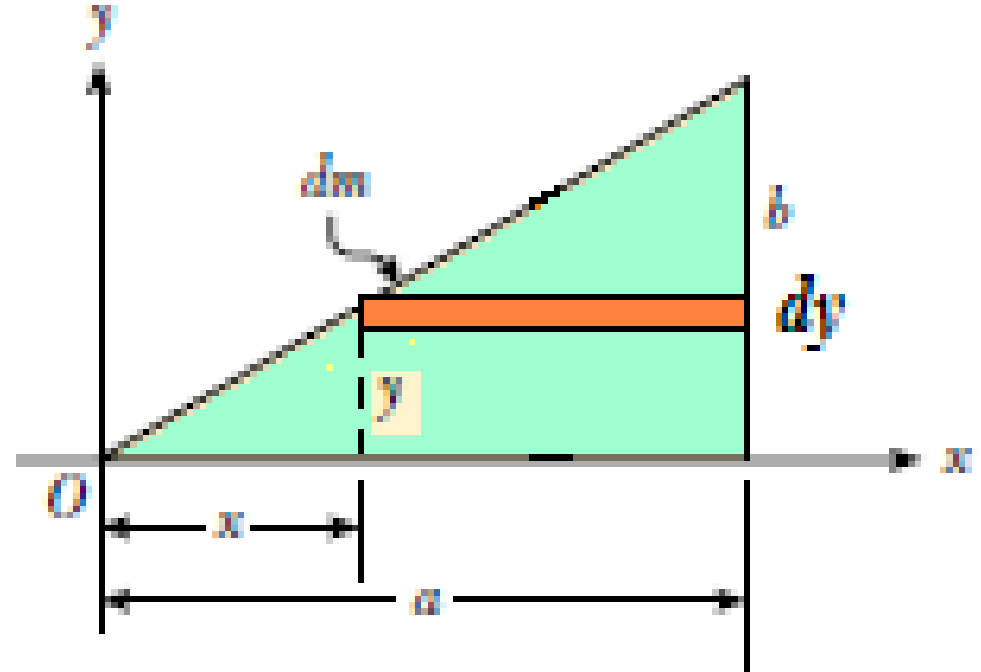
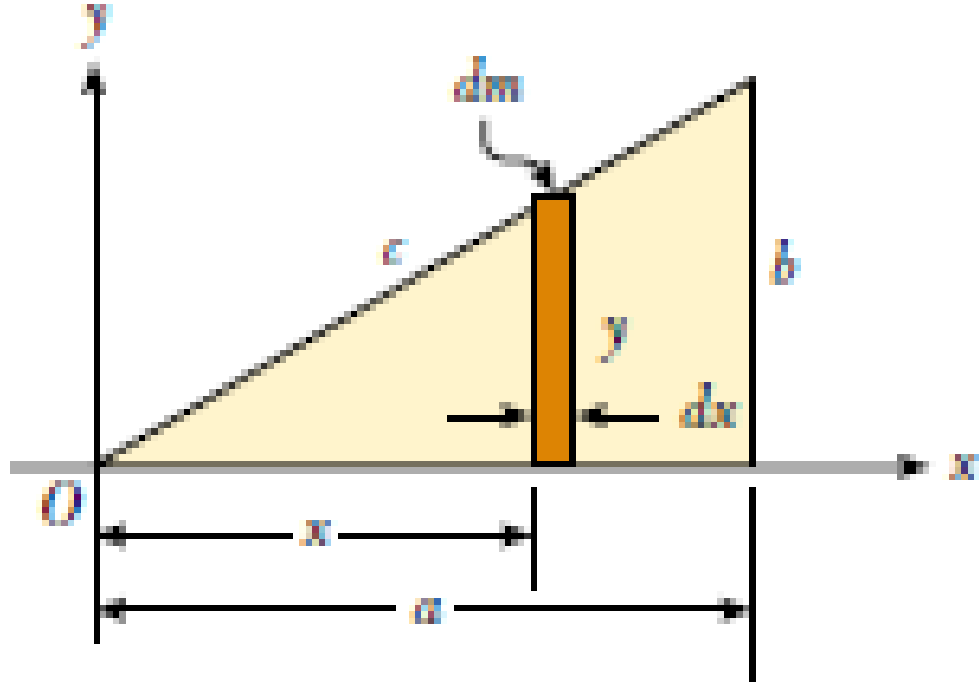
$$\lambda = \frac{M}{L}$$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \int x \lambda \, dl$$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

# Örnek

Kütlesi  $M$  ve boyutları şekilde verilen dik üçgen biçimindeki plakanın kütle merkezini ( $x_{km} = ? ; y_{km} = ?$ ) bulunuz.



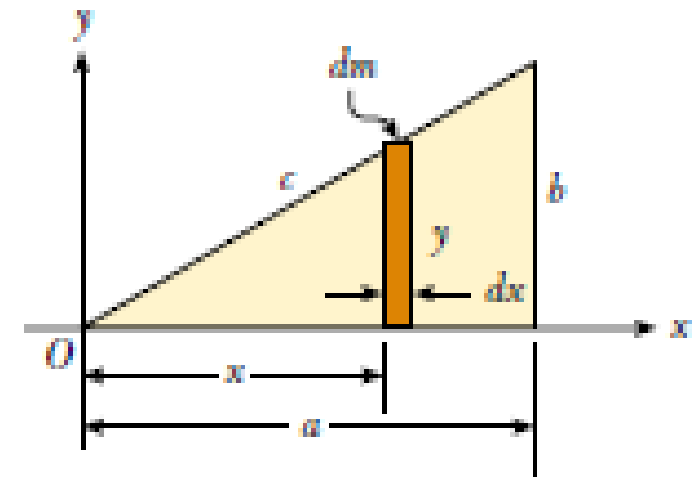
Çözüm ( $x_{km} = ?$ )

$$dm = \sigma dA = \frac{M}{\frac{ab}{2}} y dx = \frac{2M}{ab} y dx$$

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \rightarrow y = \frac{b}{a} x$$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \int_0^a x \sigma dA = \frac{2M}{abM} \int_0^a x y dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2 dx$$

$$\rightarrow x_{km} = \frac{2}{3a^2} \left| x^3 \right|_0^a = \frac{2a^3}{3a^2} = \frac{2}{3} a$$



$$\sigma = \frac{dm}{dA}$$

$$\sigma = \frac{M}{A}$$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \int x \sigma dA$$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \int x dm$$

Çözüm ( $x_{km} = \frac{2}{3}a$  ;  $y_{km} = ?$ )

$$dm = \sigma dA = \frac{M}{\frac{ab}{2}} (a - x) dy = \frac{2M}{ab} (a - x) dy$$

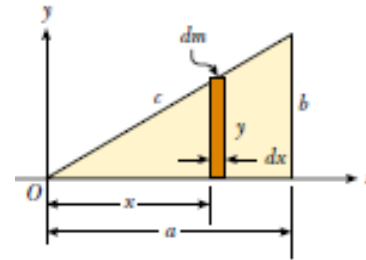
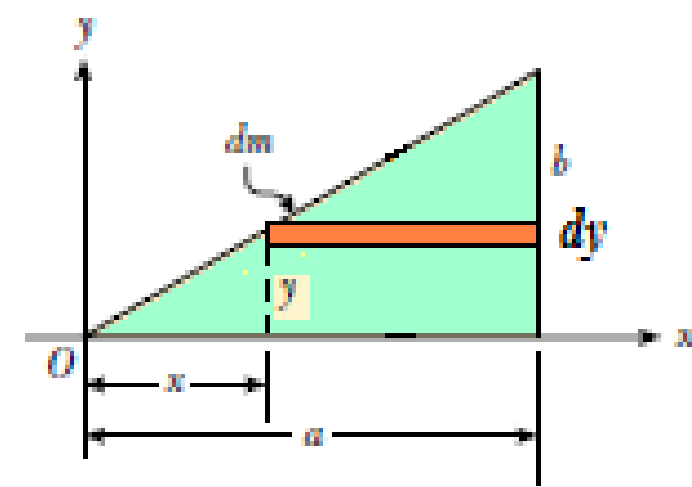
$$\frac{(b - y)}{(a - x)} = \frac{b}{a} \rightarrow (a - x) = \frac{a}{b} (b - y)$$

$$y_{km} = \frac{1}{M} \int_0^b y \sigma dA = \frac{2M}{abM} \int_0^b y(a - x) dy = \frac{2}{b^2} \int_0^b y(b - y) dy$$

$$\rightarrow y_{km} = \frac{2}{b^2} \int_0^b (by - y^2) dy = \frac{2}{b^2} \left| \frac{by^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right|_0^b = \frac{2}{b^2} \frac{b^3}{6} = \frac{1}{3}b$$

$$y_{km} = \frac{1}{M} \int y \sigma dA$$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \int x dm$$



$$\sigma = \frac{dm}{dA}$$

$$\sigma = \frac{M}{A}$$

# Parçacık Sistemlerinde Newton'un İkinci Yasası

Kütleleri  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  ve  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n$  olan  $n$  parçacıklı bir sistem düşünelim. Kütle merkezinin konum vektörü şu ifadeyle verilir:

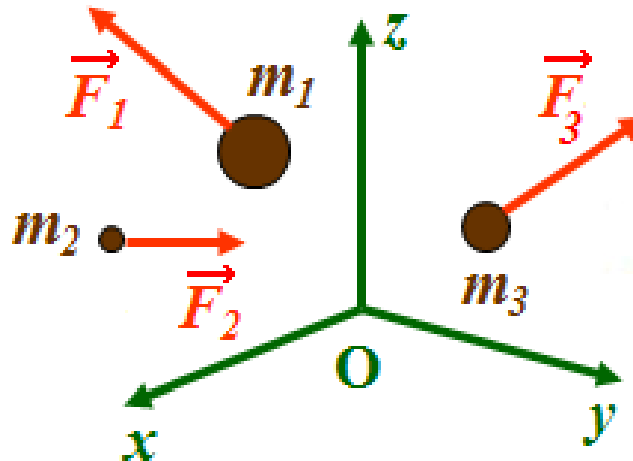
$$\vec{r}_{km} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \dots + m_n \vec{r}_n}{M}$$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

$$y_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

$$z_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$



$$x_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

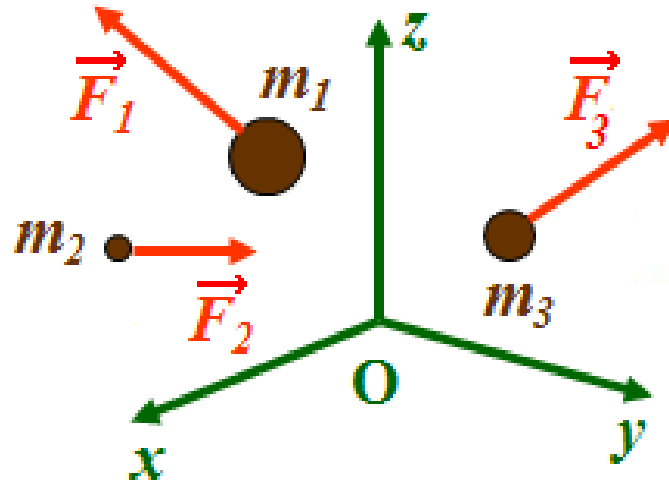
Her iki tarafın zamana göre türevi alınırsa,

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_{km} = \frac{1}{M} \left( m_1 \frac{d}{dt} \vec{r}_1 + m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_2 + m_3 \frac{d}{dt} \vec{r}_3 + \cdots + m_n \frac{d}{dt} \vec{r}_n \right)$$

$$M \vec{v}_{km} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \cdots + m_n \vec{v}_n$$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

bulunur. Burada  $\vec{v}_{km}$  kütle merkezinin hızı,  $\vec{v}_i$  de i. parçacığın hızıdır.



$$y_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

$$z_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

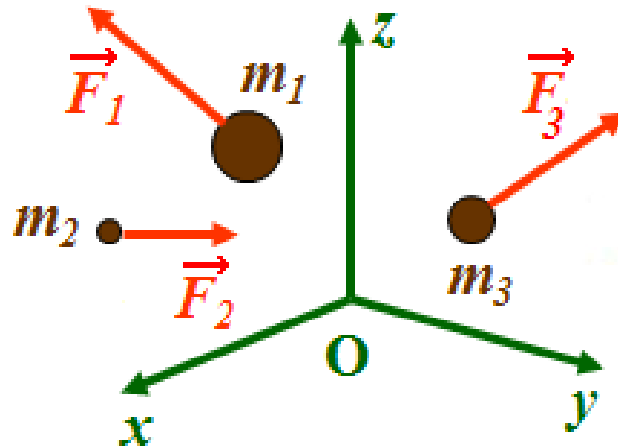
Her iki tarafın bir kez daha zamana göre türevi alınırsa,

$$\frac{d}{dt} \vec{v}_{km} = \frac{1}{M} \left( m_1 \frac{d}{dt} \vec{v}_1 + m_2 \frac{d}{dt} \vec{v}_2 + m_3 \frac{d}{dt} \vec{v}_3 + \cdots + m_n \frac{d}{dt} \vec{v}_n \right)$$

$$M \vec{a}_{km} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 + \cdots + m_n \vec{a}_n$$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

bulunur. Burada  $\vec{a}_{km}$  kütle merkezinin ivmesi,  $\vec{a}_i$  de i. parçacığın ivmesidir.



$$y_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

$$z_{km} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

Aşağıdaki eşitlikler, bir parçacık sisteminin kütle merkezinin, sistemdeki tüm parçacıkların toplandığı ve tüm dış kuvvetlerin etkidiği bir noktasal kütle gibi hareket edeceğini göstermektedir.

$$\begin{aligned}\vec{F}_{net} &= M\vec{a}_{km} \\ \vec{F}_{net,x} &= M\vec{a}_{km,x} \\ \vec{F}_{net,y} &= M\vec{a}_{km,y} \\ \vec{F}_{net,z} &= M\vec{a}_{km,z}\end{aligned}$$

$$F = ma = m \frac{dv}{dt}$$

$$\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0$$

$$F_{net} = m\vec{a}$$

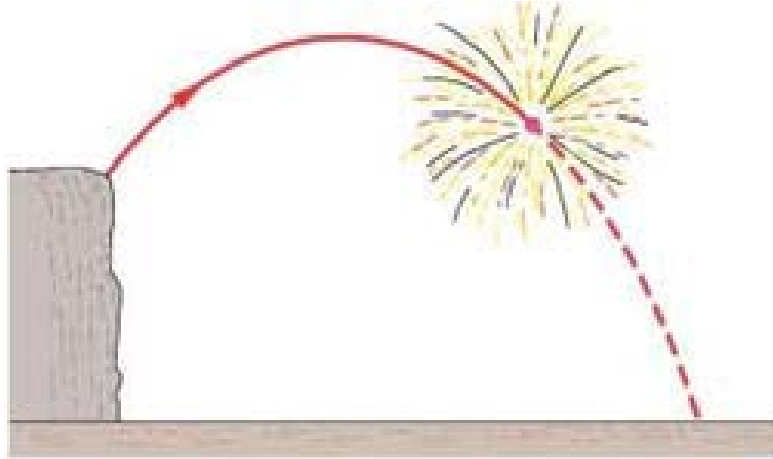
$$F_{net,x} = ma_x ; F_{net,y} = ma_y ; F_{net,z} = ma_z$$

## Şekildeki örneği ele alalım.

Yerden ateşlenen bir roket yerçekimi kuvvetinin etkisi altında parabolik bir yol izler.

Belli bir anda roket patlar ve birçok parçaya ayrılır.

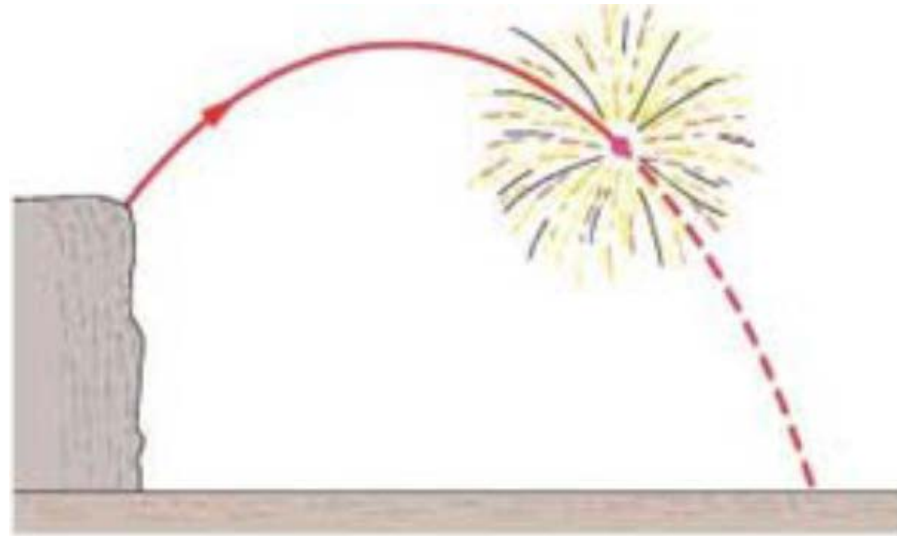
Patlama olmasaydı, roketin izleyeceği yol kesikli çizgiyle gösterilen yörünge olacaktı.



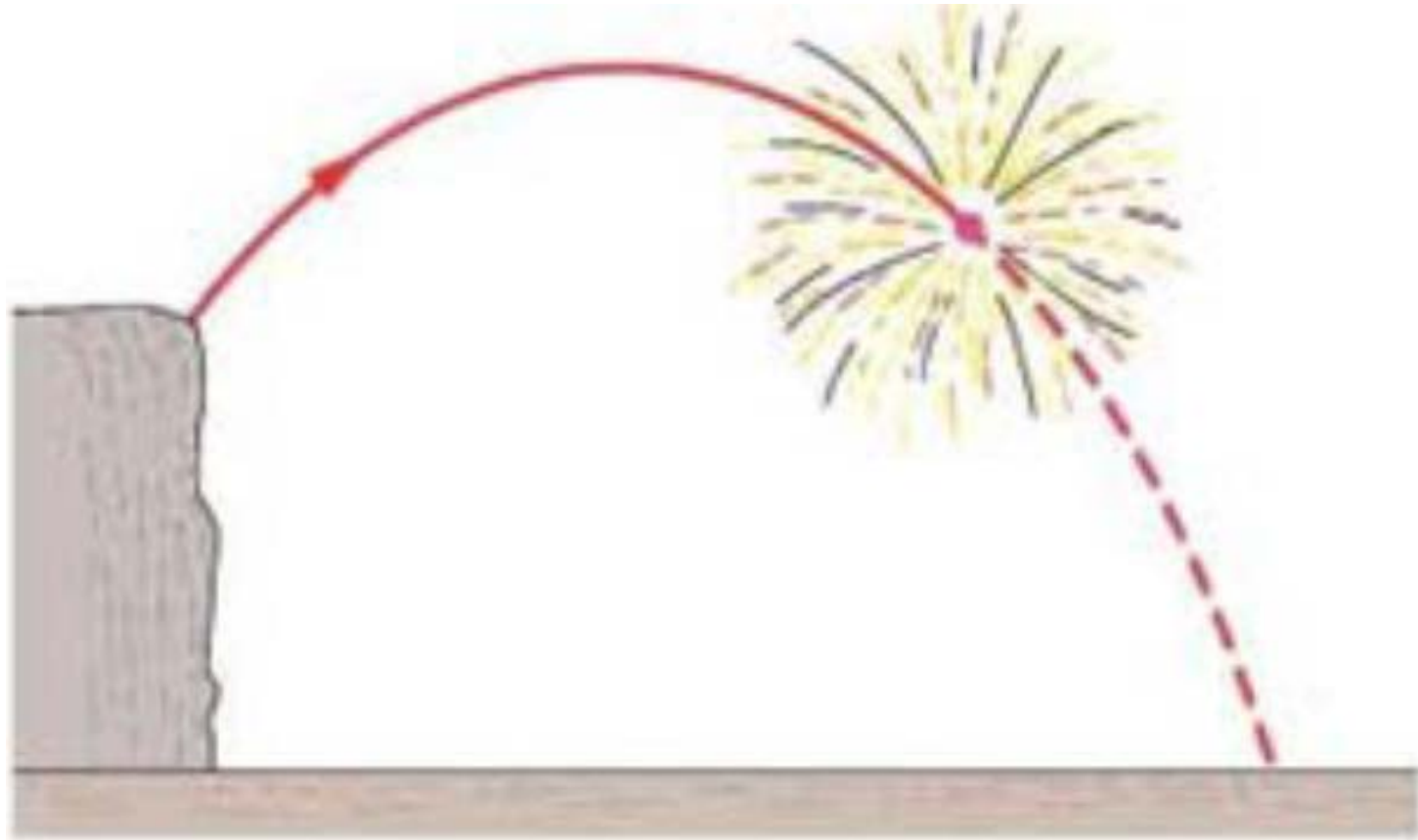
Patlamada ortaya çıkan kuvvetler iç kuvvetler olduğundan vektörel toplamı sıfır olacaktır.

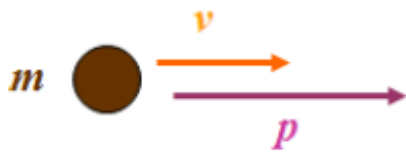
Roket üzerinde etkin olan kuvvet hala yerçekimi kuvvetidir.

Bunun anlamı, patlamada ortaya çıkan parçalar da yerçekimi kuvveti etkisiyle parabolik bir yörüngede hareket ederler.



Dolayısıyla kütle merkezinin yörüngesi, patlamadan önceki yörüngesiyle aynı olacaktır.





## Çizgisel Momentum :

Kütlesi  $m$  ve hızı  $\vec{v}$  olan bir cismin çizgisel momentumu

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

ile tanımlanır. SI sistemindeki birimi  $\text{kg.m s}^{-1}$  dir.

Momentum ifadesinin her iki tarafının zamana göre türevi alınırsa,

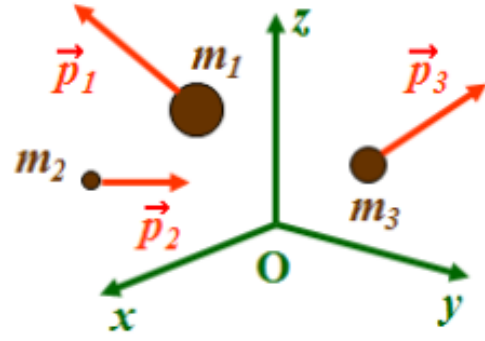
$$\vec{p} = m\vec{v} \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_{\text{net}}$$

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ bulunur.}$$

Bu ifade Newton' un ikinci yasasının bir başka ifade şeklidir.

Sözlü olarak: "Bir cismin çizgisel momentumunun değişim hızı, o cisme etkiyen net kuvvetin büyüklüğüne eşittir ve onunla (net kuvvetle) aynı yöndedir.

Bu eşitlik, bir cismin çizgisel momentumunun ancak bir dış kuvvetle değişebileceğini göstermektedir. Dış kuvvet sıfır ise, cismin çizgisel momentumu değişmez.



## Parçacık Sistemlerinin Çizgisel Momentumu :

$i$ . parçacığın kütlesi  $m_i$ , hızı  $\vec{v}_i$  ve çizgisel momentumu  $\vec{p}_i$  olsun.  $n$  tane parçacıktan oluşan bir sistemin çizgisel momentumu şu şekilde verilir:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_n = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots + m_n \vec{v}_n = M \vec{v}_{\text{km}}$$

Bir parçacık sisteminin çizgisel momentumu, sistemdeki parçacıkların toplam kütlesi ( $M$ ) ile kütle merkezinin hızının ( $\vec{v}_{\text{km}}$ ) çarpımına eşittir.

Her iki tarafın zamana göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(M \vec{v}_{\text{km}}) = M \vec{a}_{\text{km}} = \vec{F}_{\text{net}}$$

bulunur. Bu eşitlik, parçacık sisteminin çizgisel momentumunun ancak bir dış kuvvetle değişebileceğini göstermektedir.

Dış kuvvet sıfır ise, parçacık sisteminin çizgisel momentumu değişmez.

**Örnek :** Kütlesi 2 kg olan bir cismin hızı  $(2\hat{i} - 3\hat{j})$  m/s ve kütlesi 3 kg olan bir cismin hızı da  $(\hat{i} + 6\hat{j})$  m/s' dir. İki parçacıktan oluşan bu sistemin kütle merkezinin hızını ve momentumunu bulunuz.

$$\vec{v}_{\text{km}} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{M} = \frac{2(2\hat{i} - 3\hat{j}) + 3(\hat{i} + 6\hat{j})}{2 + 3} = 1.4\hat{i} + 2.4\hat{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{P}_{\text{km}} = M\vec{v}_{\text{km}} = 5(1.4\hat{i} + 2.4\hat{j}) = 7\hat{i} + 12\hat{j} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

**Örnek :** Yerden yukarı doğru ateşlenen bir roket 1000 m yükseklikte 300 m/s hıza sahipken patlayarak üç eşit parçaya bölünüyor. Birinci parça 450 m/s hızla aynı yönde, ikincisi 240 m/s hızla doğuya gidiyor. Üçüncü parçanın hızı nedir?

$$m_1 = m_2 = m_3 = \frac{M}{3}$$

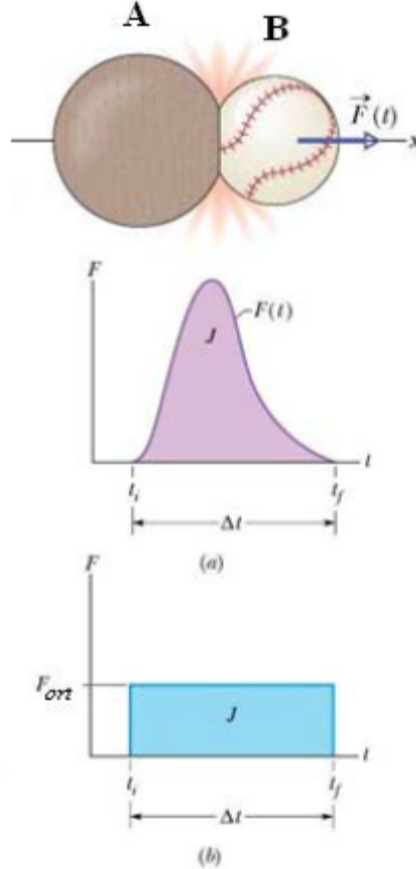
$$M\vec{v}_i = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 \rightarrow \vec{v}_3 = 3\vec{v}_i - \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_3 = (900 - 450)\hat{K} - 240\hat{D} = 450\hat{K} - 240\hat{D} \text{ m/s}$$

## Çarpışma ve İtme:

Bir cisme sıfırdan farklı bir dış kuvvet etkiğinde cismin çizgisel momentumunun değişebileceğini öğrendik.

- \* İki cismin çarpışması sürecinde böyle kuvvetler ortaya çıkar.
- \* Bu kuvvetlerin şiddetleri çok büyük ancak, etkime süreleri çok kısadır.
- \* Çarpışan cisimlerin çizgisel momentumlarındaki değişimin kaynağıdır.



İki cisim arasındaki çarpışmayı düşünelim. Çarpışma, cisimlerin temas ettiği  $t_i$  anında başlar ve temasın kesildiği  $t_f$  anında biter. Cisimler çarpışma süresince birbirlerine  $\vec{F}(t)$  ile verilen değişken bir kuvvet uygularlar. Bu kuvvetin değişimi Şekil-a' da verilmiştir.

$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}$  ile verilir. Burada  $\vec{p}$ , cisimlerden birisinin çizgisel momentumudur.

$$d\vec{p} = \vec{F}(t)dt \rightarrow \int_{t_i}^{t_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt$$

$$\int_{t_i}^{t_s} d\vec{p} = \vec{p}_s - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} = \text{momentumdaki değişim}$$

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_s} \vec{F}(t) dt = \text{"itme"} \text{ veya "impuls"} \text{ olarak tanımlanır.}$$

İtme, çarpışan bir cismin çizgisel momentumundaki değişime eşittir:  $\vec{J} = \Delta\vec{p}$

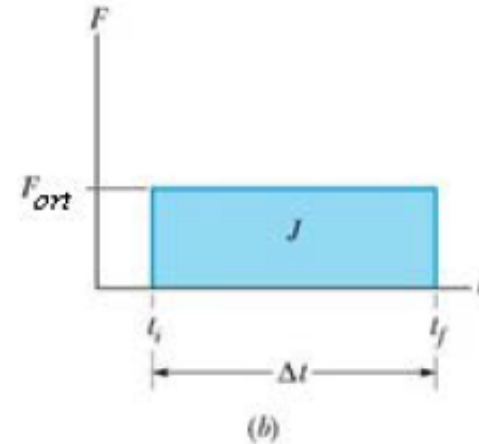
Genellikle, çarpışma süresince cisimler arasındaki etkileşme kuvvetinin zamanla nasıl değiştiğini bilemeyiz. Ancak, itmenin büyüklüğü kuvvet-zaman grafiğinde eğri altında kalan alana eşittir.

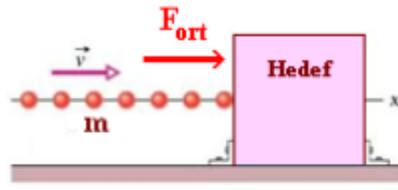
Aynı alanı verecek şekilde ortalama bir kuvvet ( $F_{\text{ort}}$ ) bulursak, cisimlerin birbirlerine uyguladığı itmeyi,

$$J = F_{\text{ort}} \Delta t = F_{\text{ort}} (t_s - t_i)$$

şeklinde yazabiliriz.

Geometrik olarak,  $F(t)$ - $t$  grafiği altında kalan alan ile  $F_{\text{ort}}$ - $t$  grafiği altında kalan alan aynıdır (Şekil-b)





## Seri Çarpışmalar :

Kütlesi  $m$  ve  $+x$ -yönünde hızı  $\vec{v}$  olan özdeş parçacıkların sürekli bir şekilde sabitlenmiş bir hedefe çarptığını düşünelim.

$\Delta t$  süresince  $n$  tane parçacığın hedefe çarptığını varsayalım. Herbir parçacığın momentumundaki değişim  $\Delta p$  olacaktır. Herbir çarpışmada  $-\Delta p$  kadarlık bir momentum hedefe aktarılacaktır.

$\Delta t$  süresince hedef üzerindeki itme (impuls)  $J = -n\Delta p$  olduğundan,

$$F_{\text{ort}} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{-n\Delta p}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t} m \Delta v \text{ olur. Burada } \Delta v, \text{ çarpışma nedeniyle}$$

herbir parçacığın hızındaki değişim miktarıdır. Dolayısıyla,

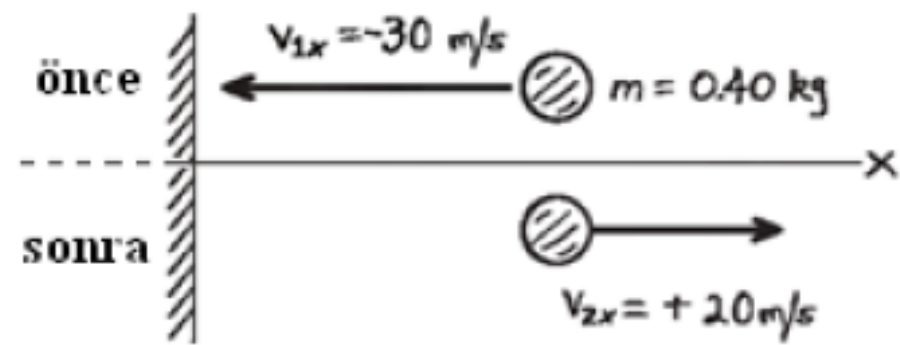
$$F_{\text{ort}} = -\frac{\Delta m}{\Delta t} \Delta v$$

yazılabilir. Buradaki  $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ , birim zamanda hedefe çarpan kütle miktarıdır.

Çarpışmadan sonra parçacıklar duruyorsa,  $\Delta v = 0 - v = -v$  olur.

Çarpışmadan sonra parçacıklar tam olarak yansiyorsa,  $\Delta v = -v - v = -2v$  olur.

**Örnek :** Kütlesi 400 g olan bir top 30 m/s hızla, şekildeki gibi bir duvara doğru fırlatılıyor. Top duvara çarptıktan sonra geliş doğrultusunun tersi yönünde 20 m/s hıza sahiptir.



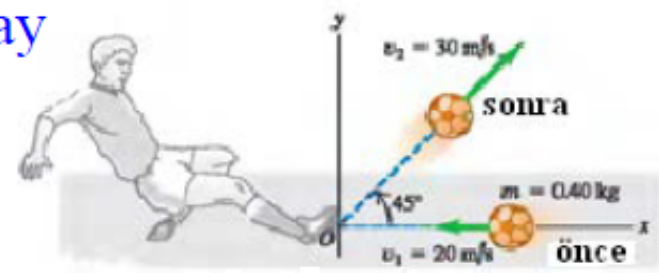
a-) Duvarın topa uyguladığı itme nedir?

b-) Topun duvarla temas süresi 10 ms ise, duvarın topa uyguladığı ortalama kuvvet nedir?

$$a-) \vec{J} = \Delta \vec{p} = m\vec{v}_s - m\vec{v}_i = 0.4 \left[ 20\hat{i} - (-30\hat{i}) \right] = 20\hat{i} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$b-) \vec{J} = \vec{F}_{ort} \Delta t \rightarrow \vec{F}_{ort} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{20\hat{i}}{0.01} = 2000\hat{i} \text{ N}$$

**Örnek :** Kütlesi 400 g olan bir top 20 m/s hızla yatay doğrultuda sola doğru geliyor. Oyuncu topa geliş doğrultusunun tersi yönünde yatayla  $45^\circ$  ' lik bir açıyla vuruyor ve topa 30 m/s' lik bir hız kazandırıyor. Top ile oyuncu arasındaki temas süresi 10 ms olduğuna göre,



a-) Oyuncunun topa uyguladığı itme nedir?

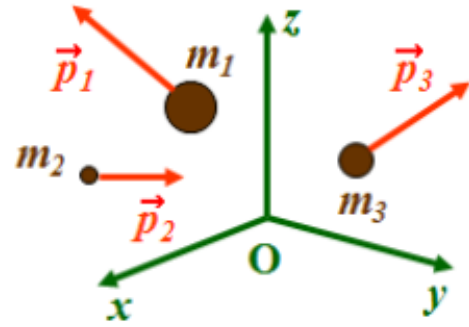
b-) Oyuncunun topa uyguladığı ortalama kuvvet nedir?

$$a-) \vec{J} = \Delta \vec{p} = m\vec{v}_s - m\vec{v}_i = 0,4 \left[ 30 \cos 45^\circ \hat{i} + 30 \sin 45^\circ \hat{j} - (-20 \hat{i}) \right]$$

$$\vec{J} = 16.5 \hat{i} + 8.5 \hat{j} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$b-) \vec{J} = \vec{F}_{ort} \Delta t \quad \rightarrow \quad \vec{F}_{ort} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{16.5 \hat{i} + 8.5 \hat{j}}{0.01} = 1650 \hat{i} + 850 \hat{j} \text{ N}$$

$$F_{ort} = \sqrt{(1650)^2 + (850)^2} = 1856 \text{ N} ; \theta = \tan^{-1} \left( \frac{850}{1650} \right) = 27.25^\circ$$



## Çizgisel Momentumun Korunumu :

Bir parçacık sistemi üzerine etkiyen net kuvvet

$$\vec{F}_{\text{net}} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{net}} = 0 \rightarrow \vec{P} = \text{sabit}$$

Bir parçacık sistemi üzerine dış kuvvet etkimiyorsa,  
toplam çizgisel momentum  $\vec{P}$  değişmez.

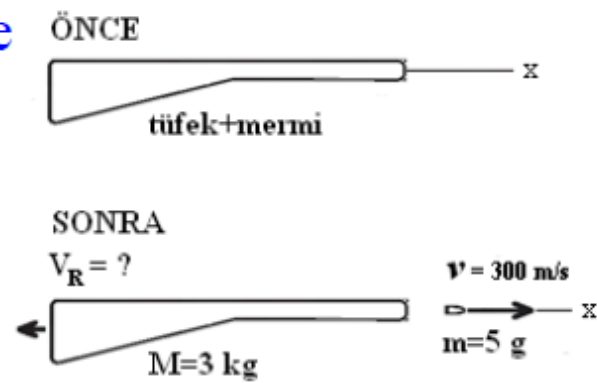
$$\left[ \begin{array}{l} \text{Herhangi bir } t_i \text{ anındaki} \\ \text{çizgisel momentum} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Herhangi bir } t_s \text{ anındaki} \\ \text{çizgisel momentum} \end{array} \right]$$

Çizgisel momentumun korunumu önemli bir ilkedir ve çarpışma problemlerinin çözümünde büyük kolaylık sağlar.

**Not :** Bir sistem üzerine etkiyen dış kuvvet  $\vec{F}_{\text{net}} = 0$  ise, iç kuvvetler ne kadar büyük olursa olsun, çizgisel momentum her zaman korunur.

**Örnek :** Bir nişancı 3 kg' lık bir tüfeği geri tepmesine izin verecek şekilde tutuyor. Yatay doğrultuda nişan olarak 5 g' lık mermiyi 300 m/s hızla ateşliyor.

- a-) Tüfeğin geri tepme hızını,  
 b-) Merminin ve tüfeğin momentumunu,  
 c-) Merminin ve tüfeğin kinetik enerjisini bulunuz.



$$a-) \vec{P} = m\vec{v} + M\vec{V}_R = 0 \rightarrow \vec{V}_R = -\frac{m\vec{v}}{M} = -\left(\frac{0.005}{3}\right)300\hat{i} = -0.5\hat{i} \text{ m/s}$$

$$b-) \vec{P}_m = m\vec{v} = (0.005)300\hat{i} = 1.5\hat{i} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

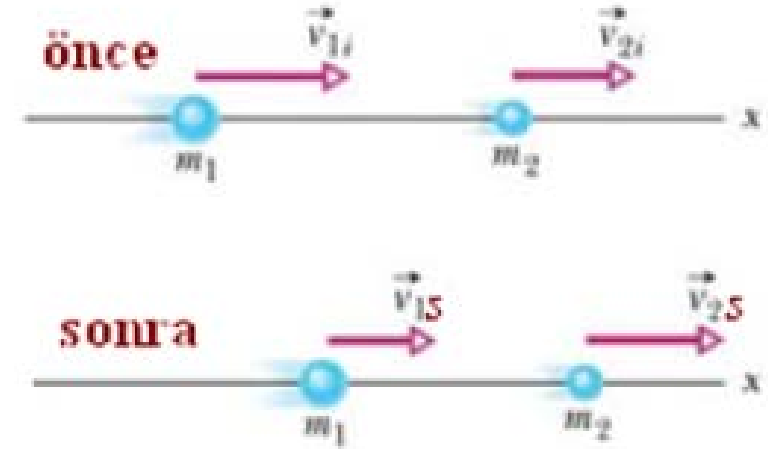
$$\vec{P}_R = M\vec{V}_R = (3)(-0.5\hat{i}) = -1.5\hat{i} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$c-) K_m = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.005)(300)^2 = 226 \text{ J}$$

$$K_R = \frac{1}{2}MV_R^2 = \frac{1}{2}(3)(0.5)^2 = 0.375 \text{ J}$$

## Çarpışmalarda Momentum ve Kinetik Enerji :

Kütleleri  $m_1$  ve  $m_2$ , ilk hızları  $\vec{v}_{1i}$  ve  $\vec{v}_{2i}$ , çarpışmadan sonraki hızları da  $\vec{v}_{1s}$  ve  $\vec{v}_{2s}$  olan iki cisim düşünelim.



Sistem izole ve  $\vec{F}_{\text{net}} = 0$  ise, çizgisel momentum korunur. Bu kural, çarpışmanın türüne bakılmaksızın doğrudur.

Çarpışmaları iki sınıfta toplamak mümkündür.

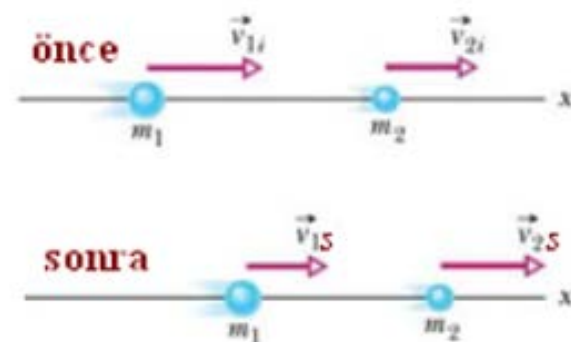
"Esnek (elastik)" ve "Esnek olmayan" olmayan çarpışmalar.

Kinetik enerjide bir kayıp yoksa ( $K_i = K_s$ ), çarpışma **esnek** çarpışmadır.

Kinetik enerjide bir kayıp varsa ( $K_s < K_i$ ), çarpışma **esnek olmayan** çarpışmadır.

Bu kayıp başka bir enerji formuna dönüşmüştür deriz.

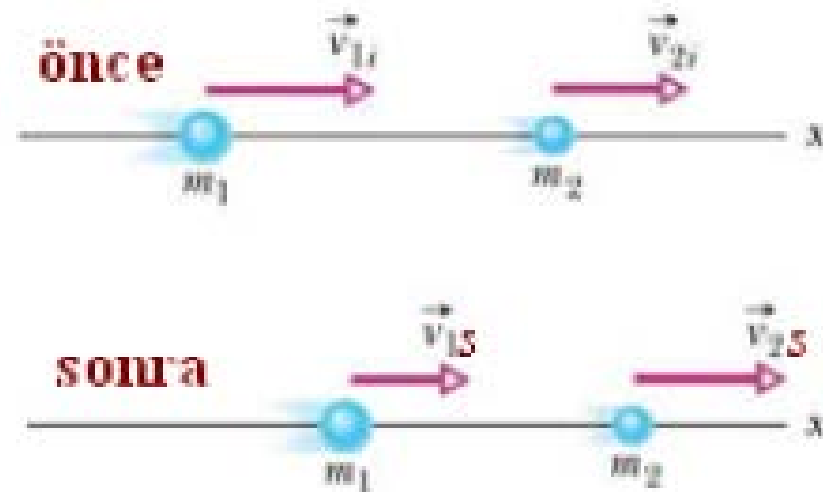
İki cisim çarpıştıktan sonra birbirine yapışıp birlikte hareket ediyorsa, cisimler "**tamamen esnek olmayan**" veya "**esnek olmayan tam çarpışma**" yapmıştır deriz. Bu tür çarpışmalar esnek olmayan çarpışma türüdür ve kinetik enerjideki kaybın en fazla olduğu çarpışma türüdür.

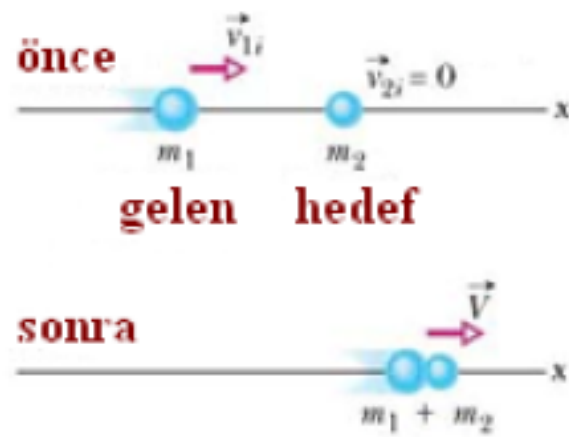


# Bir - Boyutta Esnek Olmayan Çarpışma :

Bu tür çarpışmalarda, çarpışan cisimlerin çizgisel momentumları korunur:

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1s} + \vec{p}_{2s} \rightarrow m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1s} + m_2 \vec{v}_{2s}$$





## Bir - Boyutta Tamamen Esnek Olmayan Çarpışma :

Bu tür çarpışmalarda, çarpışan cisimler yapışır ve çarpışmadan sonra birlikte hareket ederler. Soldaki resimde,  $\vec{v}_{2i} = 0$  özel durumu için:

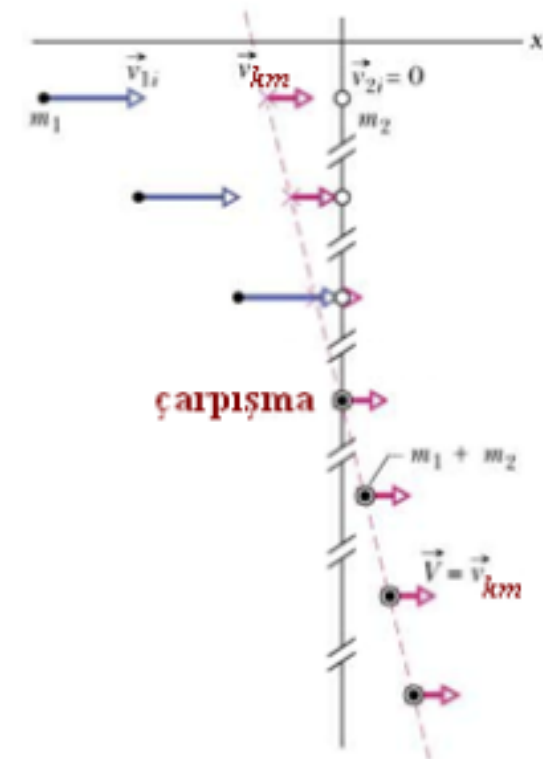
$$m_1 v_{1i} = m_1 V + m_2 V \rightarrow V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

bulunur.

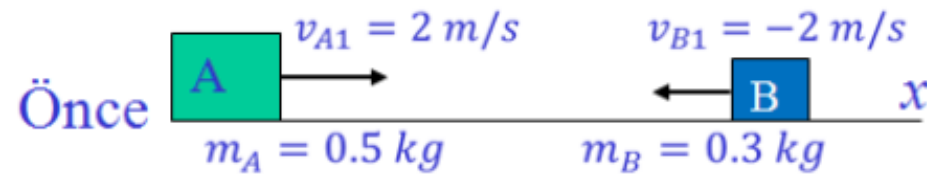
Bu tür çarpışmalarda kütle merkezinin hızı

$$\vec{v}_{km} = \frac{\vec{P}}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{v}_{1i}}{m_1 + m_2}$$

ile verilir.



**Örnek :** Kütleleri 0.5 kg ve 0.3 kg olan iki blok şekildeki gibi birbirine doğru 2 m/s' lik hızlarla hareket ediyorlar. Çarpışmadan sonra iki blok birleşip birlikte hareket ettiklerine göre, çarpışmadan sonra blokların ortak hızı nedir? Sistemin çarpışmadan önceki ve sonraki kinetik enerjisini kıyaslayınız.



$$m_A \vec{v}_{A1} + m_B \vec{v}_{B1} = (m_A + m_B) \vec{v}_{AB2}$$

$$\vec{v}_{AB2} = \frac{(0.5)(2\hat{i}) + (0.3)(-2\hat{i})}{0.5 + 0.3} = 0.5\hat{i} \text{ m/s}$$

$$K_1 = \frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B1}^2 = 1.6 \text{ J} ; \quad K_2 = \frac{1}{2} (m_A + m_B) v_{AB2}^2 = 0.1 \text{ J}$$

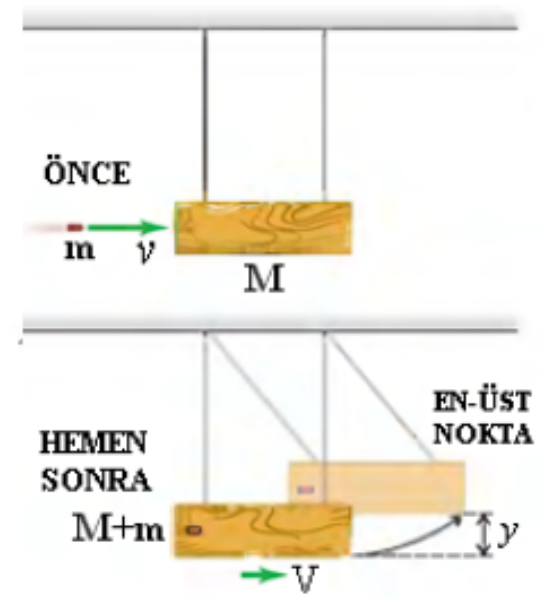
$$\Delta K = K_2 - K_1 = -1.5 \text{ J' lük enerji kaybı vardır.}$$

**Örnek :** Kütlesi  $m$  olan bir mermi, kütlesi  $M$  olan tahta bloğa doğru ateşleniyor ve **tamamen esnek olmayan çarpışma** yapıyorlar. Blok+mermi sistemi maksimum  $y$  yüksekliğine çıkıyor. Merminin geliş hızını, bilinenler cinsinden bulunuz.

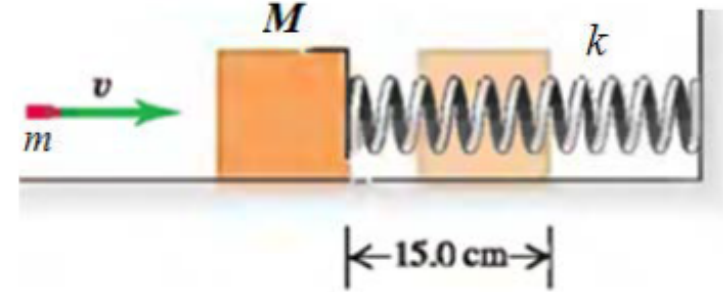
$$mv = (m + M)V \rightarrow V = \frac{mv}{m + M}$$

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gy \rightarrow V^2 = 2gy$$

$$\left( \frac{m}{m + M} \right)^2 v^2 = 2gy \rightarrow v = \left( \frac{m + M}{m} \right) \sqrt{2gy}$$



**Örnek :** Bir tüfekten ateşlenen 8 g kütleli mermi yatay, sürtünmesiz bir yüzeyde bulunan ve bir yaya bağlanmış 0.992 kg kütleli tahta bloğa saplanıyor. Blok+mermi yayı 15.0 cm sıkıştırıyor. Yayı 0.25 cm uzatmak için gerekli kuvvet 0.75 N olduğuna göre, çarpışmadan hemen sonra blok+mermi sisteminin hızı nedir?



Merminin çarpışmadan önceki hızı nedir?

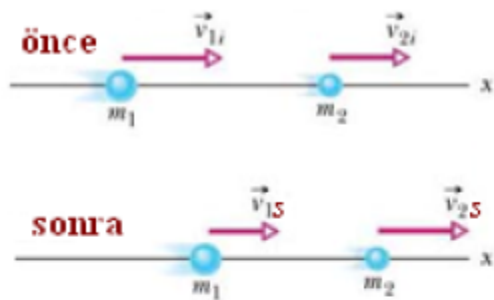
$$k = \frac{0.75}{0.25 \times 10^{-2}} = 300 \text{ N/m}$$

$$mv = (m + M)V \rightarrow V = \frac{mv}{m + M} \quad \text{Blok+merminin çarpışmadan sonraki hızı}$$

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow V = \sqrt{\frac{k}{m + M}}x = 2.6 \text{ m/s}$$

Merminin çarpışmadan önceki hızı:  $v = \frac{m + M}{m}V = 325 \text{ m/s}$

## Bir - Boyutta Esnek Çarpışma :



Kütleleri  $m_1$  ve  $m_2$ , ilk hızları  $\vec{v}_{1i}$  ve  $\vec{v}_{2i}$ , çarpışmadan sonraki hızları da  $\vec{v}_{1s}$  ve  $\vec{v}_{2s}$  olan iki cisim düşünelim.

Bu tür çarpışmalarda hem çizgisel momentum, hem de kinetik enerji korunur.

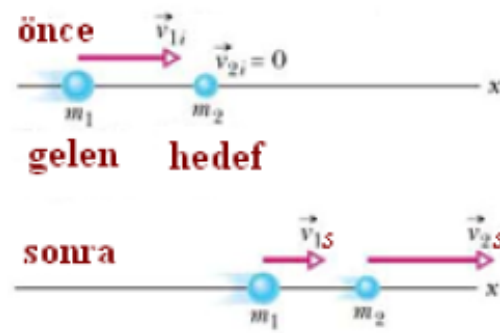
Çizgisel momentumun korunumu:  $m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1s} + m_2 \vec{v}_{2s}$  (Eş-1)

Kinetik enerjinin korunumu :  $\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1s}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2s}^2$  (Eş-2)

İki bilinmeyenli ( $\vec{v}_{1s}$  ve  $\vec{v}_{2s}$ ) bu iki denklem çözülürse, cisimlerin çarpışmadan sonraki hızları için şu ifadeler elde edilir:

$$\vec{v}_{1s} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{2i}$$

$$\vec{v}_{2s} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{2i}$$



## Esnek Çarpışmada Özel Durum ( $\vec{v}_{2i} = 0$ ):

Az önce elde edilen eşitliklerde  $\vec{v}_{2i} = 0$  yazarsak,  
 $\vec{v}_{1s}$  ve  $\vec{v}_{2s}$ :

$$\vec{v}_{1s} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{2i} \rightarrow \vec{v}_{1s} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i}$$

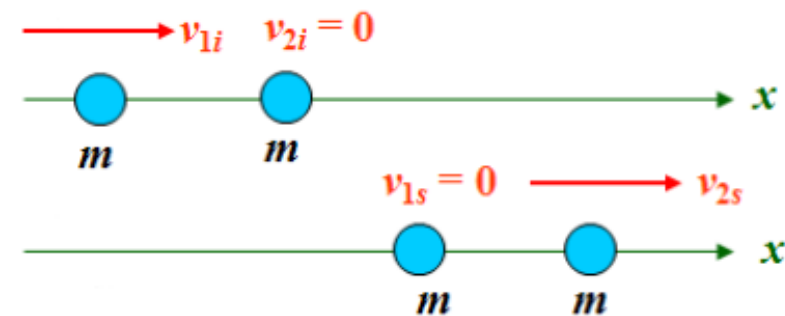
$$\vec{v}_{2s} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{2i} \rightarrow \vec{v}_{2s} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i}$$

bulunur. Aşağıdaki özel durumlara göz atalım:

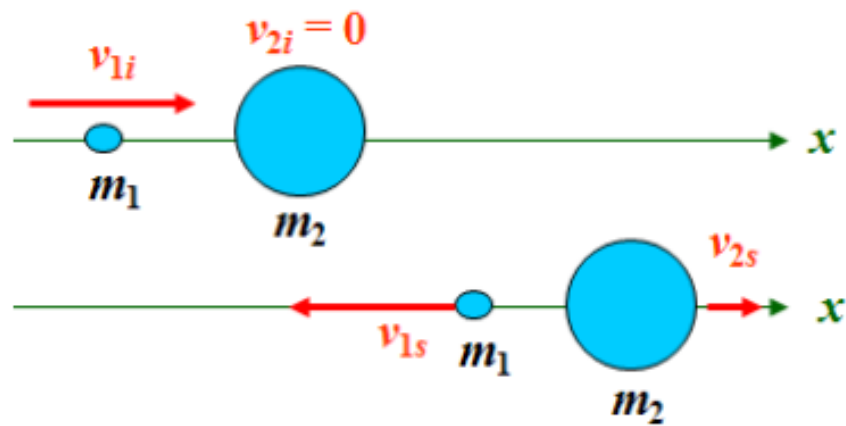
1.  $m_1 = m_2 = m$

$$\vec{v}_{1s} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i} = \frac{m - m}{m + m} \vec{v}_{1i} = 0$$

$$\vec{v}_{2s} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i} = \frac{2m}{m + m} \vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1i}$$



Çarpışan cisimler hızlarını değiştirirler.



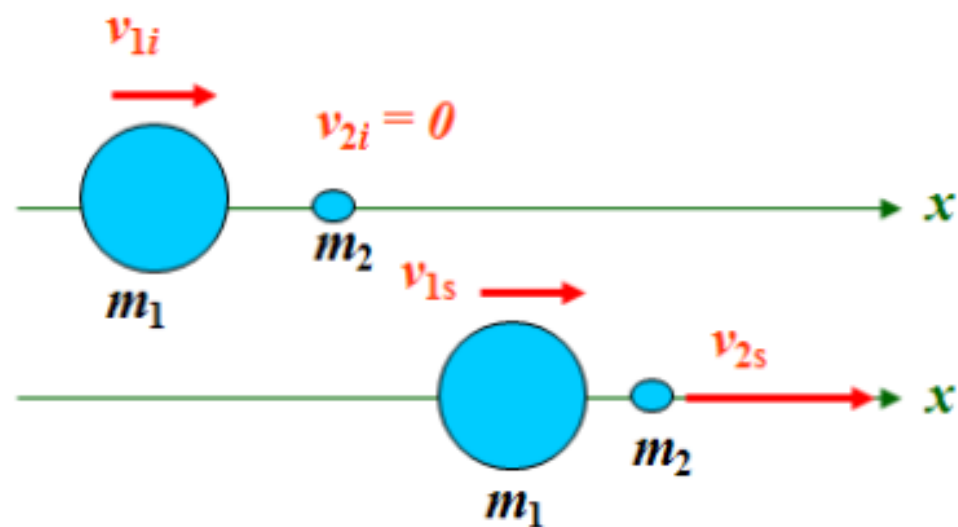
$$2. m_2 \gg m_1 \rightarrow \frac{m_1}{m_2} \ll 1$$

$$\vec{v}_{1s} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i} = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \vec{v}_{1i} \approx -\vec{v}_{1i}$$

$$\vec{v}_{2s} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i} = \frac{2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \vec{v}_{1i} \approx 2\left(\frac{m_1}{m_2}\right) \vec{v}_{1i}$$

$m_1$  cismi (küçük cisim) aynı hızla geliş yönünün tersi yönünde hareket eder.

$m_2$  cismi (büyük cisim) ileri yönde çok küçük bir hızla hareket eder ( $\frac{m_1}{m_2} \ll 1$ ).



$$3. m_1 \gg m_2 \rightarrow \frac{m_2}{m_1} \ll 1$$

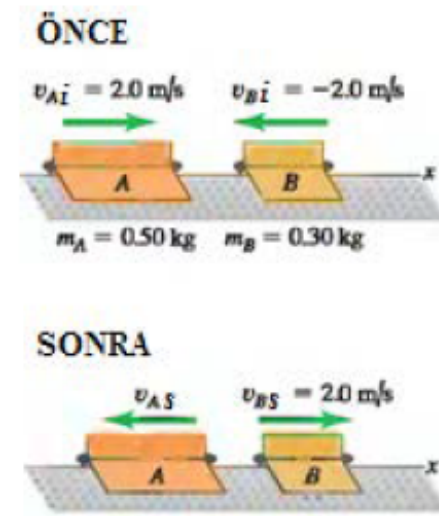
$$\vec{v}_{1s} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i} = \frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \vec{v}_{1i} \approx \vec{v}_{1i}$$

$$\vec{v}_{2s} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i} = \frac{2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \vec{v}_{1i} \approx 2\vec{v}_{1i}$$

$m_1$  cismi (büyük cisim) neredeyse aynı hızla yoluna devam eder.

$m_2$  cismi (küçük cisim) gelen cismin yaklaşık iki katı bir hızla hareket eder.

**Örnek :** Kütleleri 0.50 kg ve 0.30 kg olan  $A$  ve  $B$  blokları birbirine doğru 2.0 m/s hızlarla yaklaşıp çarpışıyorlar. Çarpışmadan sonra  $B$  bloğu aynı hızla ters yönde giderken  $A$  bloğunun hızı ne olur? Çarpışmanın türü ne olabilir?



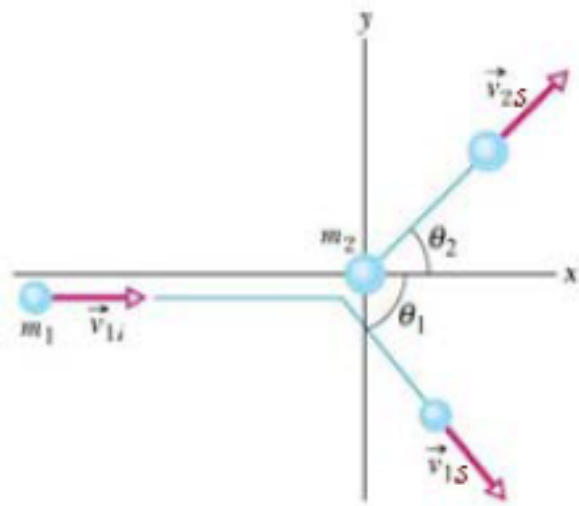
$$m_A \vec{v}_{Ai} + m_B \vec{v}_{Bi} = m_A \vec{v}_{As} + m_B \vec{v}_{Bs} \rightarrow 0.50(2.0\hat{i}) + 0.30(-2.0\hat{i}) = 0.50\vec{v}_{As} + 0.30(2.0\hat{i})$$

$$\vec{v}_{As} = -\frac{0.20\hat{i}}{0.50} = -0.40\hat{i} \text{ m/s}$$

$$K_i = \frac{1}{2}m_A v_{Ai}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bi}^2 = \frac{1}{2}(0.50)(2.0)^2 + \frac{1}{2}(0.30)(-2.0)^2 = 1.6 \text{ J}$$

$$K_s = \frac{1}{2}m_A v_{As}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bs}^2 = \frac{1}{2}(0.50)(-0.40)^2 + \frac{1}{2}(0.30)(2.0)^2 = 0.64 \text{ J}$$

Kinetik enerji korunmuyor  $\rightarrow$  "esnek olmayan çarpışma"



## İki - Boyutta Çarpışma :

Kütleleri  $m_1$  and  $m_2$  olan iki cismin  $xy$ -düzleminde çarpıştıklarını gözönüne alalım.

Sistemin çizgisel momentumu korunur:  $\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1s} + \vec{p}_{2s}$

Çarpışma esnek ise kinetik enerji de korunur:  $K_{1i} + K_{2i} = K_{1s} + K_{2s}$

Çarpışmadan önce  $m_2$  parçacığının durgun olduğunu, çarpışmadan sonra da  $m_1$  cisminin geliş doğrultusuyla  $\theta_1$ ,  $m_2$  cisminin de  $\theta_2$  açısı yaptığını varsayalım.

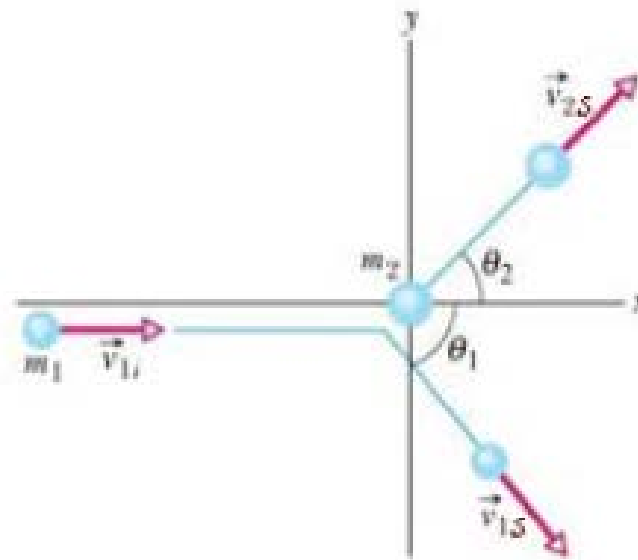
Bu durumda, momentumun ve kinetik enerjinin korunum ifadeleri:

$$x - \text{ekseni: } m_1 v_{1i} = m_1 v_{1s} \cos \theta_1 + m_2 v_{2s} \cos \theta_2 \quad (\text{Eş-1})$$

$$y - \text{ekseni: } 0 = -m_1 v_{1s} \sin \theta_1 + m_2 v_{2s} \sin \theta_2 \quad (\text{Eş-2})$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1s}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2s}^2 \quad (\text{Eş-3})$$

olur.



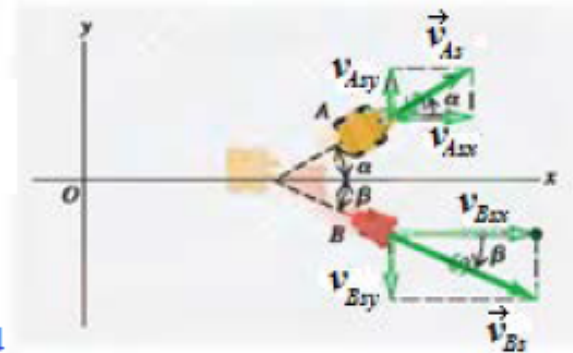
Yedi bilinmeyenli  $(m_1, m_2, v_{1i}, v_{1s}, v_{2s}, \theta_1, \theta_2)$  üç tane denkleminiz var. Bunlardan herhangi dört tanesinin verilmesi halinde, diğer üçü kolaylıkla bulunabilir.

**Örnek :** Kütlesi 20 kg bir oyuncak robot ( $A$ )  $+x$  yönünde 2 m/s hızla giderken, yolu üzerinde durgun halde bulunan ve kütlesi 12 kg olan başka bir robota ( $B$ ) şekildeki gibi çarpıyor. Çarpışmadan sonra  $A$  robotu geliş doğrultusu ile  $30^\circ$  açı yapacak şekilde yukarı yönde 1 m/s hızla hareket ediyorsa,  $B$  robotunun hızı ne olur?

ÖNCE



SONRA



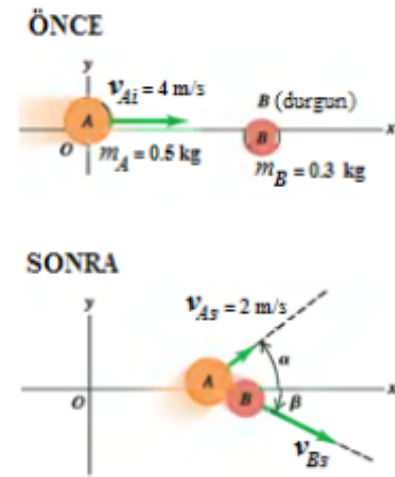
$$m_A \vec{v}_{Ai} + m_B \vec{v}_{Bi} = m_A \vec{v}_{As} + m_B \vec{v}_{Bs} \quad \text{Momentunun korunumu}$$

$$P_{xi} = P_{xs} \rightarrow 20(2\hat{i}) = (20 \cos 30)\hat{i} + (12v_B \cos \beta)\hat{i} \rightarrow v_B \cos \beta = 1.89$$

$$P_{yi} = P_{ys} \rightarrow 0 = (20 \sin 30)\hat{j} + (-12v_B \sin \beta)\hat{j} \rightarrow v_B \sin \beta = 0.833$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{0.833}{1.89}\right) = 23.8^\circ \rightarrow v_B = \frac{0.833}{\sin \beta} = 2.06 \text{ m/s}$$

**Örnek :** Kütlesi 0.5 kg olan bir bilye ( $A$ )  $+x$  yönünde 4 m/s hızla giderken, yolu üzerinde durgun halde bulunan ve kütlesi 0.3 olan başka bir bilyeye ( $B$ ) esnek olarak çarpıyor. Çarpışmadan sonra  $A$  bilyesi geliş doğrultusu ile bilinmeyen bir  $\alpha$  açısı yapacak şekilde 2 m/s hızla hareket etmektedir.  $B$  bilyesinin hızını,  $\alpha$  ve  $\beta$  açılarını hesaplayınız.



$$\frac{1}{2}m_A v_{Ai}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bi}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{As}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bs}^2$$

Kinetik enerjinin korunumu

$$v_{Bs} = \sqrt{\frac{m_A}{m_B}(v_{Ai}^2 - v_{As}^2)} = \sqrt{\frac{0.5}{0.3}(16 - 4)} = 4.47 \text{ m/s}$$

$$m_A \vec{v}_{Ai} + m_B \vec{v}_{Bi} = m_A \vec{v}_{As} + m_B \vec{v}_{Bs}$$

Momentumun korunumu

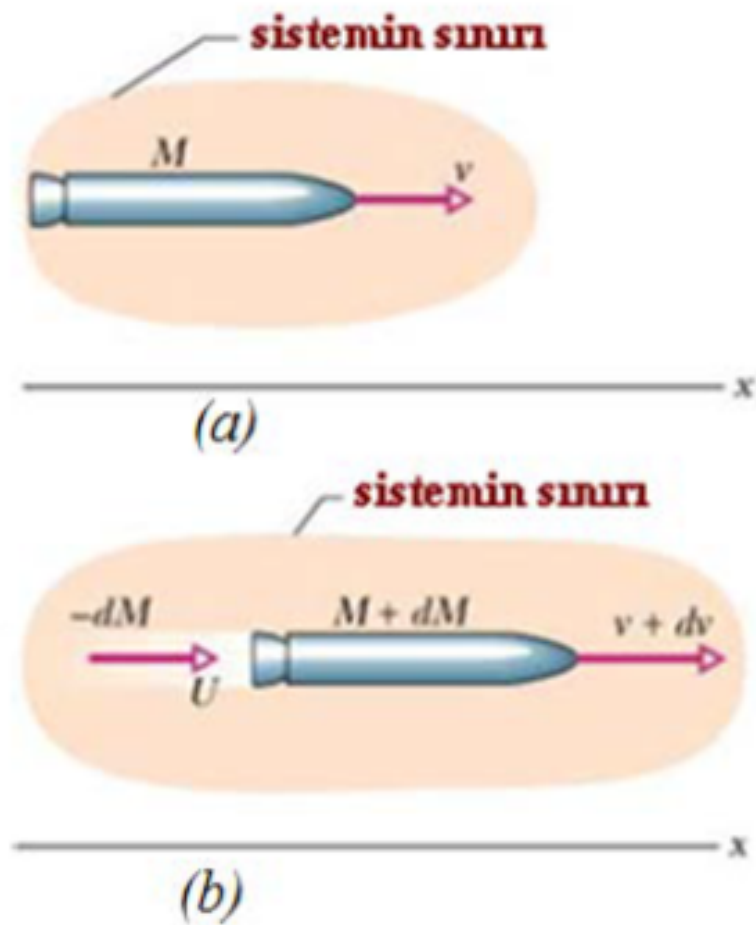
$$P_{xi} = P_{xs} \rightarrow 0.5(4\hat{i}) = 0.5(2 \cos \alpha)\hat{i} + 0.3(4.47 \cos \beta)\hat{i} \rightarrow \cos \alpha + 1.341 \cos \beta = 2$$

$$P_{yi} = P_{ys} \rightarrow 0 = 0.5(2 \sin \alpha)\hat{j} + 0.3(-4.47 \sin \beta)\hat{j} \rightarrow \sin \alpha - 1.341 \sin \beta = 0$$

$$\alpha = 36.8^\circ \text{ ve } \beta = 26.5^\circ$$

## Değişken Kütleli Sistemler (Roketler) :

- \* Hızı  $v$  kütlesi  $M$  olan bir roket,  $\frac{dM}{dt}$  ' lik bir hızla kütle kaybeder.
- \* Kaybolan bu kütle, rokete göre ters yönde  $v_{\text{bağıl}}$  hızına sahiptir.
- \* Böylece roket kütle kaybeder ve ivmelenir.
- \* Çizgisel momentumun korunumunu kullanarak roketin  $v$  hızını bulabiliriz.



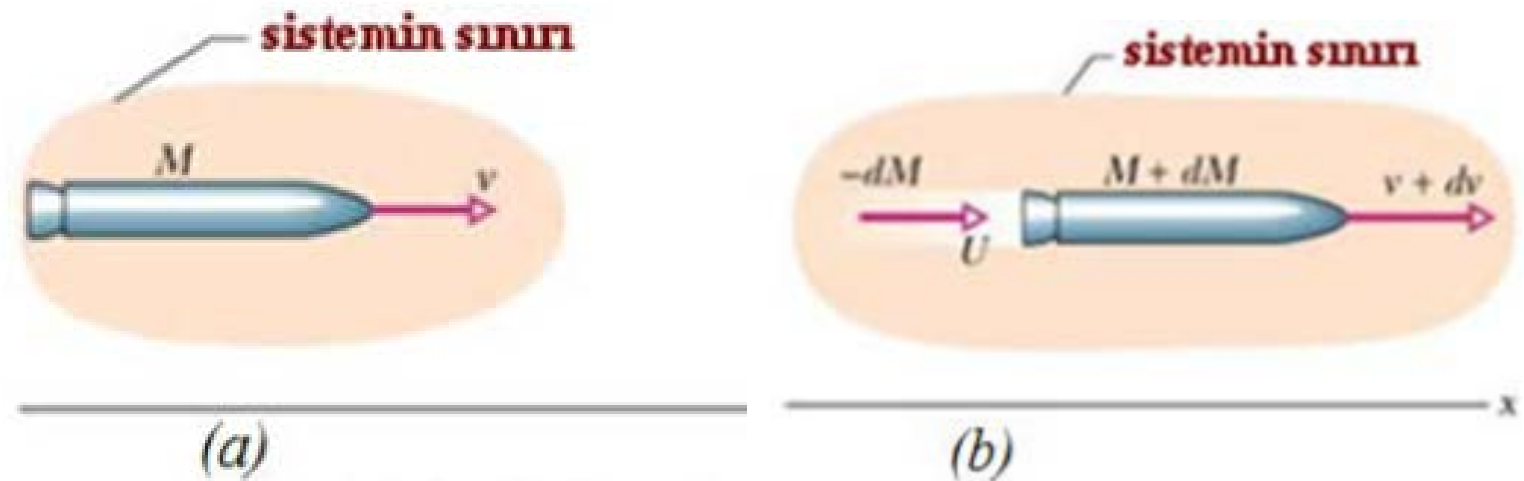
Şekil (a) ve (b), roketin  $t$  ve  $t + dt$  anlarındaki durumunu göstermektedir. Rokete herhangi bir dış kuvvet etkimiyorsa çizgisel momentum korunur.

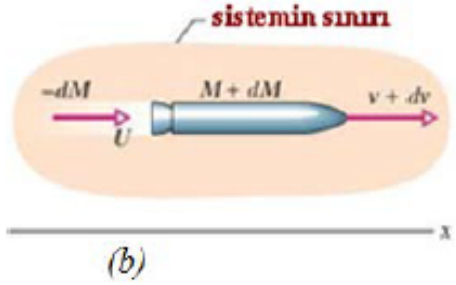
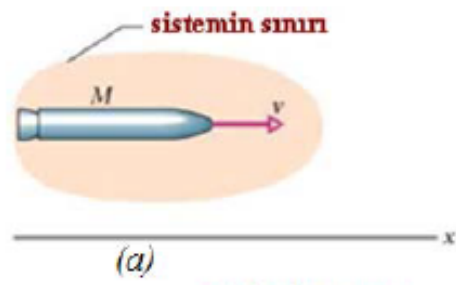
$$p(t) = p(t + dt) \rightarrow Mv = -UdM + (M + dM)(v + dv) \quad (\text{Eş-1})$$

Roket zamanla kütle kaybettiği için,  $dM$  negatiftir.  $U$ , atılan gazın yere göre hızıdır ve  $U \equiv v + dv - v_{\text{bağıl}}$  ifadesine sahiptir. Bunu yukarıdaki ifadede yerine koyarsak,

$$Mdv = -dMv_{\text{bağıl}} \quad (\text{Eş-2})$$

bulunur.





Yakıtın  $\frac{dM}{dt} = -R$  (Eş-3) sabit hızıyla roketten atıldığını varsayalım. Burada, R sabit bir sayıdır.

Eş-2' nin her iki tarafını  $dt$  ile bölersek  $\rightarrow M \frac{dv}{dt} = -\frac{dM}{dt} v_{\text{bağlı}} = R v_{\text{bağlı}} \rightarrow$

$Ma = R v_{\text{bağlı}}$  (birinci roket denklemi) elde edilir. Burada  $a$ , roketin ivmesidir.

Eş-2' den roketin hızını zamanın fonksiyonu olarak bulabiliriz:

$$dv = -v_{\text{bağlı}} \frac{dM}{M} \rightarrow \int_{v_i}^{v_s} dv = -v_{\text{bağlı}} \int_{M_i}^{M_s} \frac{dM}{M} \rightarrow v_s - v_i = -v_{\text{bağlı}} [\ln M]_{M_i}^{M_s} \rightarrow$$

$$v_s - v_i = v_{\text{bağlı}} \ln \left( \frac{M_i}{M_s} \right) \quad (\text{ikinci roket denklemi})$$

