ÖDEV 1) L_z bazında:

$$|\psi\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$ durumunu gözönüne alalım.

Sistem üzerinde L_z^2 ölçümü yapılıyor ve $+\hbar^2$ bulunuyor. Sistemin ölçümden hemen sonra durumu ne olur. Bu sonucun bulunma olasılığı nedir. Eğer L_z ölçülürse hangi değerler hangi olasılıkla bulunur.

SORU 1) Bir parçacık demeti üzerinde L^2 ve L_z aynı anda ölçülüyor. Ölçüm sonucu $(l,m) = (0,0)$ ve $(1,-1)$ değerleri $3/4$ ve $1/4$ olasılıklarla bulunuyor.

a) Ölçümden önce demetin bulunduğu durumu oluşturun.

b) Demetteki $(l,m) = (1,-1)$ olan parçacıklar ayıklanıyor ve L_x ölçümü yapılıyor. Hangi değerler hangi olasılıklarla bulunur.

c) İkinci ölçüm sonucu oluşabilecek durumların uzaysal dalga fonksiyonunu bulun.

Çözüm 1)

a) L_z ve L^2 aynı anda ölçülebilir ve $|l,m\rangle$ ile gösterilen ortak özdurumlara sahiptirler. Böylece sistemin başlangıçtaki durumu;

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0,0\rangle + \frac{1}{2}e^{i\alpha}|1,-1\rangle$$

α : keyfi bir faz.

b) Sistemden $|1,-1\rangle$ durumlarını ayırarak, bunlar üzerinde L_x ölçümü yapacağız. Sistemin yeni durumu:

$$|\chi\rangle = |1,-1\rangle$$

L_x ölçümü yapıldığında elde edilecek sonuçları görebilmek için bu durumu $|l,m_x\rangle$ bazında yazmalıyız. Bunun için bazlar arasındaki dönüşüm katsayılarını bulmalıyız. $l=1$ olduğundan;

$$|1,m_x\rangle = c_-|1,-1\rangle + c_0|1,0\rangle + c_+|1,1\rangle$$

L_x uygularsak: $\left(L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}\right)$

$$m_x\hbar|1,m_x\rangle = \frac{c_-}{2}L_+|1,-1\rangle + c_0\left(\frac{L_+ + L_-}{2}\right)|1,0\rangle + c_+\frac{L_-}{2}|1,1\rangle$$

$$m_x\hbar|1,m_x\rangle = \frac{C_-}{\sqrt{2}}\hbar|1,0\rangle + \frac{C_0\hbar}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle + |1,-1\rangle) + \frac{C_+}{\sqrt{2}}|1,0\rangle$$

$$m_x|1,m_x\rangle = \left(\frac{C_- + C_+}{\sqrt{2}}\right)|1,0\rangle + \frac{C_0}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle + |1,-1\rangle)$$

Bunu bazladığımız durumla karşılaştırırsak;

$$\sqrt{2}\,m_x C_0 = C_- + C_+$$

$$\sqrt{2}\,m_x C_+ = C_0 = \sqrt{2}\,m_x C_-$$

Böylece $m_x = 1 \Rightarrow |l, m_x = 1\rangle = \frac{1}{2}|1,-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{2}|1,1\rangle$ (1)

$m_x = -1 \Rightarrow |l, m_x = -1\rangle = \frac{1}{2}|1,-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{2}|1,1\rangle$ (2)

$m_x = 0$ için bu durumlara dik bir durum daha bulmalıyız.

$|1, m_x = 0\rangle = a|1,1\rangle + b|1,0\rangle + c|1,-1\rangle$ olsun.

$$\left.\begin{aligned} \langle 1, m_x = -1 | 1, m_x = 0\rangle = 0 &= \frac{a}{2} - \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{c}{2} \\ \langle 1, m_x = +1 | 1, m_x = 0 = 0 &= \frac{a}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{c}{2} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} b &= 0 \\ a &= -c \end{aligned}$$

Böylece;

$|1, m_x = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle - |1,-1\rangle)$ bulunur. (3)

Buradan ters dönüşüm yaparak $|1,-1\rangle$ durumunu $|1,m_x\rangle$'ler cinsinden bulabiliriz.

$|1,-1\rangle = \frac{1}{2}|1, m_x = 1\rangle + \frac{1}{2}|1, m_x = -1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1, m_x = 0\rangle$ olur.

Bu durum üzerinde L_x ölçümü yapılırsa

$P(L_x = +\hbar) = 1/4$, $P(L_x = -\hbar) = 1/4$ $P(L_x = 0) = 1/2$

c) Sistem $|1, m_x = 1\rangle$, $|1, m_x = -1\rangle$, $|1, m_x = 0\rangle$ durumlarına düşebilir. Bunların $|l,m\rangle$ cinsinden yazabildiğimiz için uzaysal dalga fonksiyonunu küresel harmoniklerin lineer kombinasyonu olarak yazabiliriz.

(1)'den $\psi_+(\theta,\phi) = \frac{1}{2}Y_1^{-1}(\theta,\phi) + \frac{1}{\sqrt{2}}Y_1^0(\theta,\phi) + \frac{1}{2}Y_1^{+1}(\theta,\phi)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\sin\theta\, e^{-i\phi} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2}\cos\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\sin\theta\, e^{-i\phi} = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}(\cos\theta - i\sin\theta\sin\phi)$$

Benzer şekilde

$$\psi_{-}(\theta,\phi)=\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}(-\cos\theta-i\sin\theta\sin\phi)$$

ve

$$\psi_{0}(\theta,\phi)=-\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\phi\sin\theta \quad \text{elde edilir.}$$

<u>ÖDEV 2)</u> Önceki sorunun (b) şıkkında yaptığımız işlem L_x'in özdurumlarını L_z operatörü bazında bulmak ve daha sonra ters dönüşüm yaparak L_z'in özdurumlarını L_x bazında yazmaktı. Bu işlemi daha sistematik olarak yapmak için

a) L_x operatörünün matris elemanlarını L_z bazında bulunuz. Bunun için $L_x=\frac{L_+ + L_-}{2}$ eşitliğini kullanınız. ($l=1$ için)

b) (a) şıkkında bulduğunuz matrisin, yani L_x operatörün özdeğer ve özdurumlarını bulunuz. Bulduğunuz özdurumlar $|1,m_x\rangle$ durumlarının $|1,m\rangle$ bazındaki açılımı olacaktır.

c) Özdurumlardan, L_x'i köşegenleştiren matrisi bulunuz. Bu matrisin tersini kullanarak $|1,m\rangle$ durumlarını $|1,m_x\rangle$ durumları cinsinden bulunuz.

d) (a), (b) ve (c) şıkkındaki işlemleri L_y operatörü için tekrarlayınız.

SORU 2) Bir protonun Coulomb potansiyelinde hareket eden bir e^- $|\psi\rangle=\frac{4}{5}|1,0,0\rangle+\frac{3i}{5}|2,1,1\rangle$ durumunda bulunmaktadır. Burada $|n,l,m\rangle$ H atomunun standart enerji özdurumlarıdır.

a) Bu durum için $\langle E\rangle$ nedir? $\langle L^2\rangle$, $\langle L_z\rangle$ nedir?

b) t anında $|\psi(t)\rangle=?$ (a) şıkkındaki hangi beklenen değerler zamana göre değişir.

ÇÖZÜM 2)

a) $$\langle\psi|H|\psi\rangle=\left(\frac{4}{5}\langle 1,0,0|-\frac{3i}{5}\langle 2,1,1|\right)H\left(\frac{4}{5}|1,0,0\rangle+\frac{3i}{5}|2,1,1\rangle\right)$$

$$=\frac{16}{25}E_1+\frac{9}{25}E_2=\frac{16}{25}E_1+\frac{9}{25}\cdot\frac{1}{4}E_1=\frac{73}{100}E_1$$

$$\langle L^2\rangle = \hbar^2 0(0+1)P(l=0) + \hbar^2 1(1+1)P(l=1) = 2\hbar^2\frac{9}{25} = \frac{18\hbar^2}{25}$$

$$\langle L_z\rangle = 0.P(m=0) + \hbar P(m=1) = \frac{9}{25}\hbar$$

b) $$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle = \frac{4}{5}e^{-iE_1t/\hbar}|1,0,0\rangle + \frac{3i}{5}e^{-iE_2t/\hbar}|2,1,1\rangle$$

Beklenen değerlerin zamana bağlı olup olmadığını görmek için Ehrenfest teoremini kullanabiliriz.

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle [H,A]\rangle$$

$\langle E\rangle$ için $[H,H]=0$

$\langle L^2\rangle$ için $[H,L^2]=0$ olduğundan beklenen değerler zamana bağlı değildir.

$\langle L_z\rangle$ için $[H,L_z]=0$

SORU 3) H atomunun taban durumunda bulunan bir $\bar{e}$ nun klasik olarak izin verilen bölgenin dışına çıkma olasılığını bulunuz.

Çözüm 3) Klasik olarak $\bar{e}$, kinetik enerjisinin sıfır olduğu noktadan geri döner. Yani toplam enerjisinin tamamı potansiyel enerji iken.

$$-\frac{e^2}{r_{max}} = E_1 = -\frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2 \Rightarrow r_{max} = \frac{2e^2}{m\alpha^2c^2} = \frac{2e^2}{m\frac{e^4}{\hbar^2c^2}c^2} = \frac{2\hbar^2}{me^2} = 2a_0$$

Taban durumu için radyal dalga fonksiyonu;

$$R_{10}(r) = 2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}e^{-r/a_0} \quad \text{idi.}$$

Parçacığı r_{max} yarıçapının dışında bulma olasılığı;

$$P(r\geq r_{max}) = \int_{2a_0}^{\infty} dr\, r^2 R_{10}^2 = \int_{2a_0}^{\infty}\frac{4}{a_0^3}e^{-2r/a_0}r^2\,dr$$

$$= \frac{4}{a_0^3}\left[\frac{r^2e^{-2r/a_0}}{(-2/a_0)} - \frac{2}{(-2/a_0)}\frac{e^{-2r/a_0}}{(-2/a_0)^2}\left(-\frac{2r}{a_0}-1\right)\right]\Bigg|_{2a_0}^{\infty} = \frac{4e^{-4}}{a_0^3}\left[2a_0^3 + \frac{5}{4}a_0^3\right] = 0{,}24$$

SORU 4) $t=0$ anında H atomunun dalga fonksiyonu

$$\psi(\vec{r},0) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(2\psi_{100} + \psi_{210} + \sqrt{2}\,\psi_{211} + \sqrt{3}\,\psi_{21-1}\right)$$

olarak veriliyor. Alt indisler (nlm) kuantum sayılarını göstermektedir.

a) Enerjinin beklenen değerini bulun.

b) Sistemin $l=1$, $m=+\hbar$ durumunda bulunma olasılığını zamanın fonksiyonu olarak bulun.

c) $t=0$ anında elektronun protondan 10^{-10} cm'lik bir bölge içinde bulunma olasılığını (yaklaşık olarak) bulun.

d) $L=1$ ve $L_x=+1$ bulunan bir ölçüm yapıldığını varsayın. Dalga fonksiyonu bu ölçümden hemen sonra hangi durumda bulunur?

Çözüm 4)

a) $$\langle E\rangle = \sum_n E_n P(E_n) = \frac{1}{10}(4E_1 + E_2 + 2E_2 + 3E_2) = \frac{1}{5}(2E_1 + 3E_2) = \frac{1}{5}\left(2E_1 + \frac{3}{4}E_1\right)$$

$$= \frac{11}{20}E_1 = -7{,}47\,\mathrm{eV}$$

b) t anında sistemin $l=1$ $m=+\hbar$ de bulunma olasılığı ;

$$P(t) = |\langle 2,1,1|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\langle 2,1,1| e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle\right|^2$$

$$= \left|\langle 2,1,1|\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}\left(e^{-iE_1t/\hbar}|1,0,0\rangle + e^{-iE_2t/\hbar}(|2,1,0\rangle + \sqrt{2}|2,1,1\rangle + \sqrt{3}|2,1,-1\rangle)\right)\right\}\right|^2$$

$$= \frac{1}{5}$$

c) $$P(r<10^{-10}\,\mathrm{cm}, t=0) = \frac{1}{10}\int_0^{10^{-10}} (4R_{10}^2 + 6R_{21}^2)\,r^2\,dr$$

$R_{10}^2 = \frac{4}{a_0^3}e^{-2r/a_0}$ ve $R_{21}^2 = \frac{r^2}{24a^5}e^{-r/2a}$ olduğunu biliyoruz.

$a_0 = 5{,}3\times 10^{-9}$ cm ve bu değer 10^{-10}'a kıyasla ~ 50 kat büyük olduğundan :

$R_{10}^2 \simeq \frac{4}{a^3}\left(1-\frac{2r}{a}\right)$ $\quad R_{21}^2 \simeq \frac{r^2}{24a^5}\left(1-\frac{r}{2a}\right)$ diyebiliriz.

Bu değerler integralde yerine yazılırsa

$P(r<10^{-10}\,\mathrm{cm}, t=0) \simeq \frac{8}{15}\left(\frac{10^{-10}}{a_0}\right)^3 = 3{,}6\times 10^{-6}$ elde edilir.

d) $n \geq L+1$ olacağından $L=1$ ölçülmüş ise sistem $n=2$ de bulunmuş demek. Ölçümden sonra $|\psi\rangle = C_0|2,1,0\rangle + C_+|2,1,1\rangle + C_-|2,1,-1\rangle$ gibi bir durumda.

Ölçüm sonucunda $L_x = 1$ olduğundan

$L_x|\psi\rangle = |\psi\rangle$ olmalı.

$$C_0 L_x|2,1,0\rangle + C_+ L_x|2,1,1\rangle + C_- L_x|2,1,-1\rangle = C_0|2,1,0\rangle + C_+|2,1,1\rangle + C_-|2,1,-1\rangle$$

$L_x = \dfrac{L_+ + L_-}{2}$ yazarsak;

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\,C_0|2,1,1\rangle + \sqrt{2}\,(C_+ + C_-)|2,1,0\rangle + \sqrt{2}\,C_0|2,1,-1\rangle\right)$$

$$= C_0|2,1,0\rangle + C_+|2,1,1\rangle + C_-|2,1,-1\rangle$$ olur.

Buradan;

$C_+ = C_- = \dfrac{C_0}{\sqrt{2}}$ bulunur.

Böylece;

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\,|2,1,0\rangle + |2,1,1\rangle + |2,1,-1\rangle\right)$$ elde edilir.

SORU 1) Aralarında $U = \alpha x_1 x_2$ gibi bir etkileşme potansiyeli bulunan iki m kütleli lineer harmonik osilatörden oluşan bir sistemin enerji spektrumunu bulunuz.

ÇÖZÜM 1) Sistemin Hamiltonyeni iki parçacık için H.O. Hamiltonyenleri ve etkileşme potansiyelinden oluşur.

$$H = \underbrace{\frac{P_1^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X_1^2}_{H_1} + \underbrace{\frac{P_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X_2^2}_{H_2} + \underbrace{\alpha X_1 X_2}_{H_e}$$

H_1 ve H_2'nin ortak özdurumları bulunabilir, çünkü $[H_1, H_2] = 0$ dır. Ancak He dahil olduğunda $[H_1, He] \neq 0$, $[H_2, He] \neq 0$, her üçünün de köşegen olduğu bir baz bulamayız. Koordinat dönüşümü yaparak bu sistemi iki tane etkileşmeyen H.O. haline getirmek mümkündür.

$$X_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2) \qquad \Longrightarrow \qquad X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_+ + X_-)$$

$$X_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2) \qquad\qquad X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_+ - X_-)$$

şeklinde yeni koordinatlar tanımlayalım. Öncelikle dönüşümün üniter olduğunu yani boyları koruduğunu görelim.

$$\begin{pmatrix} X_+ \\ X_- \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{U} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazaracak dönüşüm matrisi için $UU^+ = 1$ olduğu gösterilebilir.

$$UU^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dönüşüm üniter olduğundan boyları koruyacaktır. Dolayısıyla bu dönüşüm altında $P_1^2 + P_2^2 = P_+^2 + P_-^2$ olarak yazılabilir. Benzer şekilde $X_1^2 + X_2^2 = X_+^2 + X_-^2$ olduğu görülebilir. Etkileşme terimi ise;

$$X_1 X_2 = \frac{1}{2}(X_+ + X_-)(X_+ - X_-) = \frac{1}{2}X_+^2 - \frac{1}{2}X_-^2 \text{ olur.}$$

Böylece $H = \frac{P_+^2}{2m} + \frac{P_-^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X_+^2 + \frac{1}{2}\alpha X_+^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 X_-^2 - \frac{1}{2}\alpha X_-^2$ olur.

Bu düzenlenirse :

$$H = \frac{P_+^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega^2+\alpha/m)X_+^2 + \frac{P_-^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega^2-\alpha/m)X_-^2 = H_+ + H_-$$

şekline gelir. Burada m kütleli iki etkileşmeyen H.O. olduğunu görüyoruz. Bir tanesi $\omega_+ = (\omega^2+\alpha/m)^{1/2}$, diğeri $\omega_- = (\omega^2-\alpha/m)^{1/2}$ frekansları ile salınım yapıyorlar. $[H_+, H_-]=0$ olduğundan ortak özdurumlar yazabiliriz ; $|n_+, n_->$ gibi. n_+ 1. osilatörün seviyesi , n_- ise ikinci osilatörün seviyesini gösteriyor. Enerji özdeğerleri ;

$$E_{n_+,n_-} = \left(n_+ + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_+ + \left(n_- + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_- \quad \text{olur.}$$

<u>ÖDEV</u>: 3 boyutta eşyönlü olmayan, yani x, y, z doğrultularındaki salınım frekansları farklı olan bir harmonik osilatörün enerji spektrumunu bulunuz. Her yöndeki salınım frekansları eşit olduğu durumda ilk üç enerji seviyesinin dejenerasyonunu inceleyiniz.

<u>ÖDEV</u>: X_1 ve X_2 konumlarında bulunan, P_1 ve P_2 momentumlarına sahip m kütleli iki parçacık $V = \frac{1}{2}m\omega^2X^2$ potansiyelinde hareket ediyorlar. Parçacıkların etkileşmediklerini varsayalım.

a) İki parçacıklı bu sistem için $H = H_1 + H_2$ şeklinde bir Hamiltonyen yazın. H_1 ve H_2 sırasıyla sadece 1. ve 2. parçacığın durum uzayına etki etsin. Sistemin enerjilerini ve dejenerasyonları bulunuz, ve bu enerjilere karşılık gelen durumları yazınız.

b) H C.S.C.O oluşturur mu? $\{H_1, H_2\}$ oluşturur mu? H_1 ve H_2'nin ortak özdurumların $|n_1, n_2>$ ile gösterelim. $|n_1, n_2>$ durumları için diklik ve tamlık bağıntılarını yazın.

c) $t=0$'da $|\psi(0)> = \frac{1}{2}(|0,0> + |1,0> + |0,1> + |1,1>)$ ile verilen bir sistem ele alın. i) Toplam enerji ii) 1. parçacığın enerjisi iii) 1. parçacığın konumu ölçüldüğünde hangi değerler hangi olasılıkla bulunur.

SORU 2) L^2 ve L_z operatörünün $\hbar^2 l(l+1)$ ve $m\hbar$ özdeğerli bir $|l,m\rangle$ durumundaki parçacık için, $\langle L_x\rangle$, $\langle L_y\rangle$, $\langle L_x^2\rangle$, $\langle L_y^2\rangle$ beklenen değerlerini hesaplayın.

ÇÖZÜM 2) $\langle l,m|L_x|l,m\rangle = \frac{1}{2}\langle l,m|L_+ + L_-|l,m\rangle$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle l,m|L_+|l,m\rangle + \langle l,m|L_-|l,m\rangle\right) = 0$$

Benzer şekilde $\langle L_y\rangle = \frac{1}{2i}\langle l,m|(L_+ - L_-)|l,m\rangle = 0$

$$\langle L_x^2\rangle = \frac{1}{4}\langle l,m|(L_+ + L_-)(L_+ + L_-)|l,m\rangle =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\langle L_+L_+\rangle + \langle L_-L_-\rangle + \langle L_+L_-\rangle + \langle L_-L_+\rangle\right)$$

İlk iki terimin sıfır olduğu kolayca görülebilir. Çünkü $\langle l,m|l,m\pm 2\rangle = 0$.

$$\langle L_+L_-\rangle = \langle l,m|L_+\left(L_-|l,m\rangle\right) = \langle l,m|L_+\left(\hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\,|l,m-1\rangle\right)$$

$$= \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\,\langle l,m|L_+|l,m-1\rangle$$

$$= \hbar^2\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\,\sqrt{l(l+1)-(m-1)m}\,\langle l,m|l,m\rangle = \hbar^2\left[l(l+1)-m(m-1)\right]$$

$\langle L_-L_+\rangle$ aynı yöntemle hesaplanabilir. Başka bir yöntem de şudur:

$$[L_+,L_-] = [L_x+iL_y, L_x-iL_y] = -2i[L_x,L_y] = 2\hbar L_z$$

Böylece $L_-L_+ = L_+L_- - 2\hbar L_z$ yazılabilir. Bunu kullanarak:

$$\langle L_-L_+\rangle = \langle L_+L_- - 2\hbar L_z\rangle = \langle L_+L_-\rangle - 2\hbar\langle L_z\rangle = \hbar^2\left(l(l+1)-m(m-1)\right) - 2\hbar^2 m$$

$$= \hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m(m+1) \text{ elde edilir.}$$

Böylece $\langle L_x^2\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle L_+L_-\rangle + \langle L_-L_+\rangle\right) = \frac{\hbar^2}{2}\left(l(l+1)-m^2\right)$ elde edilir.

Benzer şekilde $\langle L_y^2\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(l(l+1)-m^2\right)$ bulunur.

SORU 3) Bir sistem $\psi(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta\cos\phi$ durumunda bulunuyor.

a) L_z ölçüldüğünde hangi değerler hangi olasılıklar ile bulunur.

b) Bu durum için $\langle L_x\rangle = ?$

Çözüm 3) $\psi(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta \sin\theta \left(\frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \right)$ olarak yazılabilir.

Bu şekilde yazıldığında sistemin Y_l^m küresel harmoniklerinin lineer kombinasyonu olduğu kolayca görülebilir.

$Y_2^{\pm 1}(\theta,\varphi) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta \sin\theta e^{\pm i\phi}$ olduğundan, sistem $\psi(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\left(-Y_2^{1} + Y_2^{-1}\right)$ olur.

Ket notasyonunda ; $|l,m\rangle$

$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(-|2,1\rangle + |2,-1\rangle\right)$ olarak yazılabilir.

Sistemi normalize edersek

$N^2\langle\psi|\psi\rangle = \frac{N^2}{4}(1+1) = N^2/2 = 1 \Rightarrow N = \sqrt{2}$

O halde

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|2,1\rangle + |2,-1\rangle\right)$ olur.

a) L_z ölçülürse $\frac{1}{2}$ olasılıklarla ± 1 bulunur.

b) $\langle L_x\rangle = \frac{1}{2}\left(-\langle 2,1| + \langle 2,-1|\right) \; L_x \; \left(-|2,1\rangle + |2,-1\rangle\right)$

Aynı $|l,m\rangle$ durumları arasında $\langle L_x\rangle = 0$ olacağını önceki soruda görmüştük. $\langle 2,1|L_x|2,-1\rangle = 0$ olduğu kolayca görülebilir. L_x, L_+ ve L_- nin toplamı olarak yazılabileceğinden $L_x|2,-1\rangle$ bize $|2,0\rangle$ ve $|2,-2\rangle$ durumları verecek ki bunların $\langle 2,1|$ ile çarpımı sıfırdır.

Böylece $\langle L_x\rangle = 0$ bulunur.

SORU 4) $\vec{B} = B_0\hat{z}$ manyetik alanındaki bir katı döner için Hamiltonyen;

$H = \frac{\hat{L}^2}{2I} + \omega_0\hat{L}_z$ olarak verilmektedir. (ω_0 sabit)

Sistem $t=0$ da $\langle\theta,\phi|\psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta \sin\phi$

durumunda ise t anında sistemin durumu ne dir. t anında $\langle L_x\rangle = ?$.

Çözüm 4)

$$\langle\theta,\phi|\psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\theta\left(\frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2}\right) = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(Y_1^1 + Y_1^{-1}\right)$$ olarak yazılabilir.

Böylece $|\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle + |1,-1\rangle\right)$ olur.

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle$$

$$H|1,1\rangle = \frac{1}{2I}L^2|1,1\rangle + \omega_0 L_z|1,1\rangle = \left(\frac{\hbar^2 1(1+1)}{2I} + \omega_0\hbar\right)|1,1\rangle = E_+|1,1\rangle$$

$$H|1,-1\rangle = \left(\frac{\hbar^2 1(1+1)}{2I} - \omega_0\hbar\right)|1,-1\rangle = E_-|1,-1\rangle$$ diyelim.

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_+t/\hbar}|1,1\rangle + e^{-iE_-t/\hbar}|1,-1\rangle\right)$$ olur.

$$= \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\hbar t/I}\left(e^{-i\omega_0 t}|1,1\rangle + e^{i\omega_0 t}|1,-1\rangle\right)$$

$$\langle L_x\rangle = \frac{1}{2}\left(e^{+i\omega_0 t}\langle 1,1| + e^{-i\omega_0 t}\langle 1,-1|\right)L_x\left(e^{-i\omega_0 t}|1,1\rangle + e^{i\omega_0 t}|1,-1\rangle\right) = 0$$

bulunur.

1) Konum ve momentum operatörlerinin matris elemanlarını Harmonik osilatör enerji özdurumları bazında bulunuz. Bunların $[X,P]=i\hbar$ komütasyon ilişkisini sağladığını gösterin.

$$\hat{X}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^{+}) \qquad \hat{P}=-i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a-a^{+})$$

$$\langle n|\hat{X}|m\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle n|(a+a^{+})|m\rangle$$

$$=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Big(\langle n|a|m\rangle+\langle n|a^{+}|m\rangle\Big)=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\sqrt{m}\langle n|m-1\rangle+\sqrt{m+1}\langle n|m+1\rangle\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\sqrt{m}\,\delta_{n,m-1}+\sqrt{m+1}\,\delta_{n,m+1}\right\}$$

$$\langle n|P|m\rangle=-i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\langle n|(a-a^{+})|m\rangle=-i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left\{\sqrt{m}\,\delta_{n,m-1}-\sqrt{m+1}\,\delta_{n,m+1}\right\}$$

elde edilir.

$$[X,P]=XP-PX=X\sum_n|n\rangle\langle n|P-P\sum_m|m\rangle\langle m|X$$

$$\langle n'|[X,P]|m'\rangle=\sum_n\langle n'|X|n\rangle\langle n|P|m'\rangle-\sum_m\langle n'|P|m\rangle\langle m|X|m'\rangle$$

$$=\sum_n\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\sqrt{n}\,\delta_{n',n-1}+\sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1}\right\}\left(-i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\right)\left\{\sqrt{m'}\,\delta_{n,m'-1}-\sqrt{m'+1}\,\delta_{n,m'+1}\right\}$$

$$-\sum_m\left(-i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\right)\left\{\sqrt{m}\,\delta_{n',m-1}-\sqrt{m+1}\,\delta_{n',m+1}\right\}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\sqrt{m'}\,\delta_{m,m'-1}+\sqrt{m'+1}\,\delta_{m,m'+1}\right\}$$

$$=-\frac{i\hbar}{2}\left(\sqrt{n'+1}\sqrt{m'}\,\delta_{n',m'-2}-\sqrt{n'+1}\sqrt{m'+1}\,\delta_{n',m'}+\sqrt{n'}\sqrt{m'}\,\delta_{n',m'}-\sqrt{n'}\sqrt{m'+1}\,\delta_{n',m'-2}\right)$$

$$+\frac{i\hbar}{2}\left(\sqrt{n'+1}\sqrt{m'}\,\delta_{n',m'-2}+\sqrt{n'+1}\sqrt{m'+1}\,\delta_{n',m'}-\sqrt{n'}\sqrt{m'}\,\delta_{n',m'}-\sqrt{n'}\sqrt{m'+1}\,\delta_{n',m'-2}\right)$$

$$=\frac{i\hbar}{2}\left\{2(n'+1)\,\delta_{n',m'}-2n'\,\delta_{n',m'}\right\}$$

$$=\frac{i\hbar}{2}\left\{2n'+2-2n'\right\}\delta_{n',m'}=i\hbar\,\delta_{n',m'}=i\hbar\langle n'|m'\rangle.$$

2) Tek boyutta bir Harmonik osilatör potansiyelindeki bir parçacık, enerji ölçümü sonucu $\frac{1}{2}\hbar\omega$ ve $\frac{3}{2}\hbar\omega$ enerjilerinin eşit olasılıkta olduğu bir durumda bulunuyor. Parçacığın $t=0$ anındaki ortalama momentumu $\left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right)^{1/2}$ dir. Bu bilgiler parçacığın durumunu tanımlamak için yeterlidir.

Parçacığın bir t anındaki momentum, konum beklenen değerlerini bulunuz. $\langle p^2\rangle$ ve $\langle x^2\rangle$ yi de bularak $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2$ olduğunu gösteriniz.

H.O. için $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$.

$\frac{1}{2}\hbar\omega \rightarrow n=0$, $\frac{3}{2}\hbar\omega \rightarrow n=1$ seviyelerine karşılık geliyor.

Sistemin durumu $|\psi\rangle = c_1|0\rangle + c_2|1\rangle$

ve bunlar eşit olasılıkta ise $|c_1|^2 = |c_2|^2$ (1)

$$\langle p\rangle = \langle\psi|P|\psi\rangle = \left(c_1^*\langle 0| + c_2^*\langle 1|\right)P\left(c_1|0\rangle + c_2|1\rangle\right)$$

$$= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(c_1^*\langle 0| + c_2^*\langle 1|\right)(a-a^\dagger)\left(c_1|0\rangle + c_2|1\rangle\right)$$

$$= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(c_1^*\langle 0| + c_2^*\langle 1|\right)\left(c_2|0\rangle - c_1|1\rangle\right)$$

$$= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(c_1^*c_2 - c_2^*c_1\right) = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}$$

$\Rightarrow c_1^*c_2 - c_2^*c_1 = i$ olmalı. (2)

(1) ve (2) eşitliklerinden $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $c_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}$ seçilebilir.

Böylece sistemin durumu : $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + i|1\rangle\right)$ olur.

Bir t anında $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle + ie^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle\right)$

$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ ve $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$.

$$\langle P\rangle(t) = \langle \psi(t)|P|\psi(t)\rangle$$

$$= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,\frac{1}{2}\left\{\left(e^{iE_0t/\hbar}\langle 0| - i e^{iE_1t/\hbar}\langle 1|\right)(a-a^\dagger)\left(e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle + i e^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle\right)\right.$$

$$= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,\frac{1}{2}\left\{\left(e^{iE_0t/\hbar}\langle 0| - i e^{iE_1t/\hbar}\langle 1|\right)\left(-e^{-iE_0t/\hbar}|1\rangle + i e^{-iE_1t/\hbar}|0\rangle\right)\right.$$

$$= \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,\frac{1}{2}\left(e^{i(E_0-E_1)t/\hbar} + e^{-i(E_0-E_1)t/\hbar}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\cos\left((E_0-E_1)t/\hbar\right) = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\cos(\omega t) \quad \text{elde edilir.}$$

$$\langle X\rangle(t) = \langle \psi(t)|X|\psi(t)\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\left(e^{iE_0t/\hbar}\langle 0| - i e^{iE_1t/\hbar}\langle 1|\right)(a+a^\dagger)\left(e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle + i e^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\left(e^{iE_0t/\hbar}\langle 0| - i e^{iE_1t/\hbar}\langle 1|\right)\left(e^{-iE_0t/\hbar}|1\rangle + i e^{-iE_1t/\hbar}|0\rangle\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(i e^{i(E_0-E_1)t/\hbar} - i e^{-i(E_0-E_1)t/\hbar}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{e^{i(E_1-E_0)t/\hbar} - e^{-i(E_1-E_0)t/\hbar}}{2i}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sin\left((E_1-E_0)t/\hbar\right) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sin(\omega t)$$

$$\langle P^2\rangle(t) = \langle \psi(t)|P^2|\psi(t)\rangle$$

$$= -\frac{m\hbar\omega}{2}\,\frac{1}{2}\left\{e^{iE_0t/\hbar}\langle 0| - i e^{iE_1t/\hbar}\langle 1|\right\}(a-a^\dagger)(a-a^\dagger)\left\{e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle + i e^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle\right\}$$

$$= -\frac{m\hbar\omega}{2}\,\frac{1}{2}\left\{e^{iE_0t/\hbar}\langle 0| - i e^{iE_1t/\hbar}\langle 1|\right\}(aa - aa^\dagger - a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger)\left\{e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle + i e^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle\right\}$$

$$= +\frac{m\hbar\omega}{2}\,\frac{1}{2}\left\{e^{iE_0t/\hbar}\langle 0| - i e^{iE_1t/\hbar}\langle 1|\right\}(2a^\dagger a + 1)\left\{e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle + i e^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle\right\}$$

$$= \frac{m\hbar\omega}{2}\,\frac{1}{2}(2+2) = m\hbar\omega$$

$$\langle x^2\rangle(t) = \langle \psi(t)|x^2|\psi(t)\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\frac{1}{2}\left\{e^{iE_0t/\hbar}\langle 0| - ie^{iE_1t/\hbar}\langle 1|\right\}(a+a^+)(a+a^+)\left\{e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle + ie^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\frac{1}{2}\left\{e^{iE_0t/\hbar}\langle 0| - ie^{iE_1t/\hbar}\langle 1|\right\}\big(\underbrace{aa^+ + a^+a}_{2a^+a+1}\big)\left\{e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle + ie^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{m\omega}$$

$$\Delta X = \sqrt{\langle X^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega} - \frac{\hbar}{2m\omega}\sin^2(\omega t)}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(2 - \sin^2(\omega t)\right)^{1/2}$$

$$\Delta P = \sqrt{\langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}(2 - \cos^2(\omega t))} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(2 - \cos^2(\omega t)\right)^{1/2}$$

$$\Delta p \Delta x = \frac{\hbar}{2}\left(4 - 2 + \frac{\sin^2(2\omega t)}{4}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(2 + \frac{\sin^2(2\omega t)}{4}\right)^{1/2} > \frac{\hbar}{2}$$

Burada beklenen değerlerin klasik denklemlere uyduğunu, yani Ehrenfest teoreminin bir uygulamasını görebiliriz.

Ehrenfest teoremine göre:

$$m\frac{d}{dt}\langle X\rangle = \langle P\rangle \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dt}\langle P\rangle = -\left\langle \frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle \text{ olmalıdır.}$$

Genel olarak herhangi bir A operatörü için :

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [A,H]\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle \text{ yazılabilir.}$$

Bunun özel bir hali yukarıdaki $\langle X\rangle$ ve $\langle P\rangle$ için elde edilmiş olan denklemlerdir ki bunlar klasik mekaniğin denklemleridir. Şimdi bu denklemlerin doğruluğunu bulmuş olduğumuz ortalama değerleri kullanarak test edelim.

$$m\frac{d}{dt}\langle X\rangle(t) = m\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sin(\omega t)\right) = m\omega\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos(\omega t) = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\cos(\omega t)$$

$$= \langle P\rangle$$

$$-\left\langle\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle = -\left\langle\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}m\omega^2X^2\right\rangle = -\left\langle m\omega^2 X\right\rangle = -m\omega^2\langle X\rangle$$

$$= -m\omega^2\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sin(\omega t) = -\omega\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\sin(\omega t)$$

$$\frac{d}{dt}\langle P\rangle(t) = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\cos(\omega t)\right) = -\omega\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\sin(\omega t)$$

Böylece $-\left\langle\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle = \frac{d\langle P\rangle}{dt}$ olduğu görülür.

SORU 1) q yüklü m kütleli parçacık tek boyutta bir harmonik kuvvet ve homojen elektrik alan altında hareket ediyor. Sistemin Hamiltonyeni;

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 - q\mathcal{E}X \qquad (\mathcal{E}: \text{elektrik alan şiddeti})$$

olarak yazılabilir.

a) Enerji özdeğerlerini bulunuz.

b) $H = H_0 + H_1$ olarak ele alınırsa H_0 harmonik osilatör hamiltonyeni ve $H_1 = -q\mathcal{E}X$ elektrik alandan gelen katkı olarak düşünülebilir. Sistem $t=0$'da H_0'ın taban durumunda ise t anında H'ın taban durumunda bulunma olasılığı ne olur?

ÇÖZÜM 1)

a) $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(X - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}$ olarak yazılabilir.

İlk iki terim $\hat{X} = X - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}$ koordinatında yazılmış bir Harmonik osilatör Hamiltonyenidir. İkinci terim ise her bazda köşegen olacak olan sabit bir sayıdır. Dolayısıyla $\hat{X}$ koordinatındaki H.O. bazı Hamiltonyenin bazıdır. Böylece;

$H = \left(\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}$ şeklinde yaratma-yoketme operatörleri ile yazılabilir.

Özdurumlar $\hat{a}^{+}\hat{a}$ nın özdurumları, yani $\{|\hat{n}\rangle\}$ $(n=0,1,2\ldots)$ ve özdeğerler de $\hat{E}_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}$ olur.

b) H_0'ın özdurumları $\{|n\rangle\}$

H'ın özdurumları $\{|\hat{n}\rangle\}$

$t=0$ anında sistem H_0'ın taban durumunda ise; $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$

t anında sistemin H'ın taban durumunda, yani $|\hat{0}\rangle$ da bulunma olasılığı: $P = |\langle\hat{0}|\psi(t)\rangle|^2$ dir.

$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|0\rangle$ dır.

$|0\rangle$, H'ın özdurumu olmadığından $e^{-iHt/\hbar}|0\rangle$ işlemini doğrudan yapamayız. Bu işlemi yapabilmek için $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$'ı, H'ın bazında açalım;

$$|0\rangle = \sum_n |\tilde{n}\rangle\langle\tilde{n}|0\rangle$$

$$e^{-iHt/\hbar}|0\rangle = \sum_n e^{-iHt/\hbar}|\tilde{n}\rangle\langle\tilde{n}|0\rangle$$

$|\tilde{n}\rangle$ H'ın $\tilde{E}_n$ özdeğerli özdurumu olduğundan $e^{-iHt/\hbar}|\tilde{n}\rangle = e^{-i\tilde{E}_nt/\hbar}|\tilde{n}\rangle$ olur. Böylece;

$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|0\rangle = \sum_n e^{-i\tilde{E}_nt/\hbar}|\tilde{n}\rangle\langle\tilde{n}|0\rangle$ elde edilir.

Buradan;

$$\langle\tilde{0}|\psi(t)\rangle = \sum_n e^{-i\tilde{E}_nt/\hbar}\underbrace{\langle\tilde{0}|\tilde{n}\rangle}_{\delta_{n,0}}\langle\tilde{n}|0\rangle = e^{-i\tilde{E}_0t/\hbar}\langle\tilde{0}|0\rangle$$

$P = |\langle\tilde{0}|\psi(t)\rangle|^2 = |\langle\tilde{0}|0\rangle|^2$ haline gelir.

Bunu bulabilmek için $|\tilde{0}\rangle$ ile $|0\rangle$ arasındaki ilişkiyi bulabilmemiz gerekiyor.

H, $\tilde{x} = x - q\varepsilon/m\omega^2$ deki Harmonik osilatör, H_0 ise x'deki harmonik osilatör hamiltonyeni idi. Dolayısıyla iki sistem arasında bir öteleme dönüşümü var.

Konum bazında düşünürsek, H_0'ın özfonksiyonu ile H'ın özfonksiyonu arasında da bir öteleme dönüşümü olmalı. $q\varepsilon/m\omega^2 = \ell$ diyelim;

$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$: H_0'ın özfonksiyonu
$\tilde{\psi}_n(x) = \langle x|\tilde{n}\rangle$: H'ın özfonksiyonu
$\Big\}$ $\tilde{\psi}_n(x-\ell) = \psi_n(x)$ olmalı.

Bunu ketler cinsinden yazarsak;

$\langle x-\ell|\tilde{n}\rangle = \langle x|n\rangle$ olmalı.

$|\tilde{n}\rangle$ ile $|n\rangle$ arasındaki ilişkiyi belirlemek için öteleme operatörü tanımlayalım. Öyle ki $U(\ell)$ öteleme operatörü olmak üzere $U(\ell)|x\rangle = |x+\ell\rangle$ versin.

Böylece $\langle x-\ell| = \langle x|U(\ell)$ şeklinde yazılabilir.

Böylece ;

$\langle x-\ell|\tilde{n}\rangle = \langle x|n\rangle$ eşitliği $\langle x|U^{\dagger}(\ell)|\tilde{n}\rangle = \langle x|n\rangle$ haline gelir.

Buradan $U^{\dagger}(\ell)|\tilde{n}\rangle = |n\rangle$ veya $|n\rangle = U(\ell)|\tilde{n}\rangle$ sonucunu elde ederiz.

Şimdi $U(\ell)$ operatörünün ne olduğunu bularak $|n\rangle$ ile $|\tilde{n}\rangle$ arasındaki ilişkiyi bulabiliriz. $e^{-iHt/\hbar}$ zamanda öteleme operatörü idi. Uzaysal ötelemeler için benzer bir operatör tanımlayabiliriz : $U(\ell) = e^{-iP\ell/\hbar}$.

Bu operatörün öteleme yapıp yapmadığını kolayca gösterebiliriz.

$$\langle x|U(\ell)|\psi\rangle = \langle x|e^{-iP\ell/\hbar}|\psi\rangle = \langle x|\left\{1 - \frac{i\ell}{\hbar}P + \frac{1}{2!}\left(\frac{-i\ell}{\hbar}\right)^2 P + \dots\right\}|\psi\rangle$$

$$= \underbrace{\langle x|\psi\rangle}_{\psi(x)} + (-\ell)\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\langle x|\psi\rangle}_{\psi(x)} + \frac{1}{2!}(-\ell)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\underbrace{\langle x|\psi\rangle}_{\psi(x)} + \dots$$

$$= \psi(x-\ell) = \langle x-\ell|\psi\rangle \text{ olur.}$$

Böylece

$|n\rangle = e^{-iP\ell/\hbar}|\tilde{n}\rangle$ elde edilir.

$$\langle\tilde{0}|0\rangle = \langle 0|e^{-iP\ell/\hbar}|0\rangle$$

$$e^{-iP\ell/\hbar} = e^{-\frac{\ell}{\hbar}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a-a^{\dagger})} = e^{+\frac{\ell}{\hbar}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}a^{\dagger}}\, e^{-\frac{\ell}{\hbar}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}a}\, e^{+\frac{\ell^2 m\omega}{4\hbar}[a^{\dagger},a]}$$

(Hatırlatma $e^{A+B} = e^{A}e^{B}e^{-[A,B]/2} = e^{B}e^{A}e^{-[B,A]/2}$.)

$\langle 0|e^{-iP\ell/\hbar}|0\rangle = e^{-\ell^2 m\omega/4\hbar}\langle 0|0\rangle$ elde edilir.

$P = |\langle\tilde{0}|0\rangle|^2 = e^{-\ell^2 m\omega/2\hbar}$ elde edilir.

$\ell = q\mathcal{E}/m\omega^2$ yerine yazarsak;

$P = \exp\left(-\frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^3\hbar}\right)$ elde edilir.

SORU 2) Tek boyutta bir harmonik osilatör ele alın. Özdurumlar $\{|n\rangle\}$ olsun

a) $|0\rangle$ ve $|1\rangle$'in lineer kombinasyonu olan öyle bir durum oluşturun ki $\langle X\rangle$ maksimum olsun.

b) $t=0$ anında sistemin (a)'daki durumda bulunduğunu varsayarak:

→ Schrödinger resminde t anındaki $\langle X\rangle(t)$ yi bulun.

→ Heisenberg resminde t anındaki $\langle X(t)\rangle$ yi bulun.

ÇÖZÜM 2) a) $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ olsun.

$$\langle x\rangle = \left(\langle 0|c_0^* + \langle 1|c_1^*\right)\left(\alpha(a+a^\dagger)\right)\left(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle\right) \quad \left(\alpha : \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)$$

$$= \alpha(c_0^* c_1 + c_1^* c_0) \quad \text{olur.}$$

$c_0 = |c_0|e^{i\delta_0}$ ve $c_1 = |c_1|e^{i\delta_1}$ olarak yazabiliriz.

Buradan ;

$$\langle x\rangle = \alpha|c_0||c_1|\left(e^{i(\delta_1-\delta_0)} + e^{-i(\delta_1-\delta_0)}\right) = 2\alpha|c_0||c_1|\cos(\delta_1-\delta_0)$$

Bu ifadenin maximum değeri $\delta_1-\delta_0 = 2\pi n$ $(n=0,1\ldots)$ olduğunda olur. O halde $\delta_0=0$ ve $\delta_1=2\pi$ seçebiliriz. Böylece:

$c_0 = |c_0|$ ve $c_1 = |c_1|$ elde edilir.

Öte yandan $|c_0||c_1|$ çarpımının da max olması için $|c_0|=|c_1|$ olmalıdır. Böylece

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) \quad \text{elde edilir.}$$

b) i) Schrödinger resminde ;

Sistemin durumu zamanla değişecek : $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t/2}|0\rangle + e^{-3i\omega t/2}|1\rangle\right) \quad \text{olur.}$$

$$\langle x\rangle(t) = \langle\psi(t)|X|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(e^{+i\omega t/2}\langle 0| + e^{3i\omega t/2}\langle 1|\right)(a+a^\dagger)\left(e^{-i\omega t/2}|0\rangle + e^{-3i\omega t/2}|1\rangle\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos(\omega t) \quad \text{elde edilir.}$$

ii) Heisenberg resminde sistemin durumu değişmez, operatörler zamanla değişir Heisenberg hareket denklemine göre değişir.

$$\frac{d}{dt}\hat{X} = \frac{1}{i\hbar}[X, H] = \frac{1}{m}\hat{P}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{P} = \frac{1}{i\hbar}[X, H] = m\omega^2\hat{X}$$

İlk denklem zamana göre türetilip, ikinci denklemden dP/dt yerine yazılırsa

$$\ddot{X} = \omega^2 X \Rightarrow X(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

Buradan $P(t) = Am\omega\cos(\omega t) - Bm\omega\sin(\omega t)$ olur.

A ve B $t=0$ yazılarak ; $A = P(0)/m\omega$ $B = X(0)$ elde edilir.

Böylece

$$\langle X(t)\rangle = \frac{1}{2}\langle\psi|X(t)|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\langle\psi|P(0)|\psi\rangle}{m\omega}\sin(\omega t) + \langle\psi|X(0)|\psi\rangle\cos(\omega t)\right)$$

$$= \frac{1}{m\omega}\langle P(0)\rangle\sin(\omega t) + \langle X(0)\rangle\cos(\omega t)$$

$t=0$'da $\langle P(0)\rangle$ hesaplanırsa sıfır olduğu görülür.

$t=0$'da Schr resmi ve Heisenberg resmi operatörleri ve durumları aynı olduğundan $\langle X(0)\rangle_{Heisenberg} = \langle x\rangle(0)_{schrödinger} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$

Buradan;

$$\langle X(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos(\omega t) \text{ bulunur.}$$

ÖDEV I (1)

QM: 2013-2014

1) $\{|r\rangle\}$ ve $\{|p\rangle\}$ R ve P operatörlerinin bazları olsunlar. Her iki baz için tamlık (kapalılık) ve diklik ifadelerini yazınız.

2) $|\psi\rangle$ ve $|\varphi\rangle$ $\mathcal{E}_r$ durum uzayına ait iki ket. $|\psi\rangle$ ketini $\{|r\rangle\}$ ve $\{|p\rangle\}$ bazlarında ifade ediniz. İfadelerinizdeki terimlerin anlamlarını açıklayınız.

3) $|r\rangle$ ve $|p\rangle$ nin skaler çarpımı için bir ifade türetiniz. Bu ifade ne anlama gelir?

4) $\{|u_i\rangle\}$ $\mathcal{E}_r$ de bir baz olsun. Bu bazın tamlık bağıntısını $\{|r\rangle\}$ tasvirinde türetiniz.

5) $|\psi\rangle$ ve $|\varphi\rangle$ ketlerinin skaler çarpımlarını ayrı ayrı hem $\{|r\rangle\}$ hem de $\{|p\rangle\}$ bazlarında yazınız.

6) $|\psi\rangle$ ketinin $\{|r\rangle\}$ bazındaki ifadesini kullanarak, aynı keti $\{|p\rangle\}$ bazında yazınız. Aynı şekilde, $|\psi\rangle$ ketinin $\{|p\rangle\}$ bazındaki ifadesini kullanarak $\{|r\rangle\}$ bazındaki ifadesini türetiniz.

7) R operatörünün, $\{|r\rangle\}$ ve $\{|p\rangle\}$ bazlarındaki
P " " " " ,
tasvirleri için birer ifade türetiniz.

8) R operatörünün $\langle\varphi|R|\psi\rangle$ matris elemanını hem $\{|r\rangle\}$ hem de $\{|p\rangle\}$ bazında hesaplayınız.

P operatörü için yukarıdaki işlemleri tekrarlayınız.

9) R ve P operatörlerinin Hermitsel olduklarını hem $\{|r\rangle\}$ hem de $\{|p\rangle\}$ bazında ayrı ayrı gösterin

10) R ve P operatörleri $\mathcal{E}$ durum uzayında, yerdeğiştirebilen gözlenebilirlerin bir kümesini oluştururlar mı?

X ve P_x gözlenebilirleri $\mathcal{E}$ uzayında, $\mathcal{E}_x$ uzayında benzer bir küme oluştururlar mı?

Cevaplarınızı açıklayıcı ifadelerle destekleyiniz.

11) R ve P operatörlerinin bileşenlerinin karşılıklı olarak komütatörlerini hesaplayınız.

12) A, B, C operatörler olsunlar.

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

$$[A, B]^{\dagger} = [B^{\dagger}, A^{\dagger}]$$

olduklarını gösterin.

13) F(A), A operatörünün bir fonksiyonu ise,

$[A, F(A)] = 0$ olduğunu gösteriniz.

Aynı şekilde, eğer B operatörü A ile yerdeğiştirebiliyorsa

$AB = BA \Rightarrow [B, F(A)] = 0$ olduğunu gösteriniz.

14) n bir tam sayı olmak üzere, $[X, P_x^n] = i\hbar n P_x^{n-1}$ olduğunu gösteriniz.

15) $[X, F(P_x)] = i\hbar F'(P_x)$, $F'(P_x) = \frac{dF}{dP_x}$

$[P_x, G(X)] = -i\hbar G'(X)$, $G'(X) = \frac{dG}{dx}$

olduğunu gösteriniz.

16) $[A,C] = [B,C] = 0$ ve $C = [A,B] \Rightarrow$ (3)

$[A, F(B)] = [A,B]\, F'(B)$ olduğunu gösteriniz

17) $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$ operatörünün zamana göre

türevini hesaplayınız.

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$$

olduğunu gösteriniz

Bu sonuçtan faydalanarak,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At} e^{Bt}\right) = A e^{At} e^{Bt} + e^{At} B e^{Bt}$$

$$= e^{At} A e^{Bt} + e^{At} e^{Bt} . B$$

olduğunu gösteriniz. Eğer A ve B komüt ise,

yani $[A,B]=0 \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At} e^{Bt}\right) = (A+B) e^{At} e^{Bt}$$ olur.

18) $F(t) = e^{At} . e^{Bt}$ operatöründen yararlanıp,

bu operatörün zamana göre türevini hesaplayarak,

işlemlerin sonunda $t=0$ alarak $[t=0 \Rightarrow F(0) = \mathbb{1}]$

$$e^{A} . e^{B} = e^{A+B}\, e^{\frac{1}{2}[A,B]}$$ olduğunu gösteriniz.

19) X, Y, Z operatörlerinin $\{|r\rangle\}$ bazında matris

elemanlarını yazınız. Buradan R operatörü için ne

söyleyebilirsiniz?

20) $F = F(R) \Rightarrow \{|r\rangle\}$ bazında $F(R)$ 'nin matris elemanlarını veren ifadeyi yazın. (4)

21) P_x operatörünün $\{|r\rangle\}$ bazındaki matris elemanlarını hesaplayınız, yani $\langle r|P_x|r'\rangle = ?$

22) G, P operatörünün bir fonksiyonu olsun, $G = G(P)$. Bu fonksiyonun $\{|r\rangle\}$ bazındaki matris elemanlarını hesaplayınız, Yani $\langle r|G(P)|r'\rangle = ?$

23) P operatörünün matris elemanlarını $\{|P\rangle\}$ bazında yazınız. $G = G(P) \Rightarrow$ bu fonksiyonun aynı bazda matris elemanları için bir ifade türetiniz.

24) X operatörünün $\{|P\rangle\}$ bazındaki matris elemanlarını veren ifadeyi türetiniz.

$F(R)$ 'nin $\{|P\rangle\}$ bazındaki matris elemanlarını türetiniz, $\langle P|F(R)|P'\rangle = ?$

25) $H = \frac{1}{2m}P^2 + V(R)$ ile verilen Hermitsel Hamilton operatörü için

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

formunda yazılan Schrodinger denklemini hem $\{|r\rangle\}$ hem de $\{|P\rangle\}$ bazında yazınız.

QUIZ 1

Y.G.ÇELEBİ

23/10/2013

1. $\mathcal{V}_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$ ve $\delta|u\rangle = \int dx e^{iku}$ olduğuna göre

$$\delta(p - p^{'}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx e^{ix(p-p^{'})/\hbar} \tag{1}$$

olduğunu gösteriniz.

2. $\{u_i(\vec{r})\}$ F'nin bir bazı ise, $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$ ve F'nin her $\psi(\vec{r})$ fonksiyonu $\psi(\vec{r}) = \sum_i c_i u_i(\vec{r})$ olarak yazılır. Burada $c_i = (u_i, \psi)$'dir. Bu şartlar altında baz kapalılık bağıntısı, yani

$$\sum_i u_i(\vec{r}) u_i^*(\vec{r}^{'}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}^{'}) \tag{2}$$

olduğunu gösteriniz.

SORU 1) $[L_i, V_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} V_k$ komütasyon ilişkisini sağlayan bir vektör operatör göz önüne alın. Bu bir vektör operatörün tanımıdır.

a) $e^{-i\theta L_x/\hbar}$ operatörünün x-ekseninde θ kadarlık bir dönme işlemi gerçekleştireceğini

$$e^{-i\theta L_x/\hbar} V_i e^{i\theta L_x/\hbar} = R_{ij}(\theta) V_j$$

olduğunu göstererek ispatlayın. $R_{ij}(\theta)$ dönme matrisidir.

b) $e^{-i\pi L_x/\hbar} |l, m\rangle = |l, -m\rangle$ olduğunu gösterin.

ÇÖZÜM 1)

$A_i = e^{-i\theta L_x/\hbar} V_i e^{i\theta L_x/\hbar}$ olsun ve A_i'nin ne olduğuna bakalım.

$$\frac{dA_i}{d\theta} = -\frac{iL_x}{\hbar} e^{-i\theta L_x/\hbar} V_i e^{i\theta L_x/\hbar} + e^{-i\theta L_x/\hbar} V_i \left(\frac{iL_x}{\hbar}\right) e^{i\theta L_x/\hbar}$$

$$= -\frac{i}{\hbar} e^{-i\theta L_x/\hbar} [L_x, V_i] e^{i\theta L_x/\hbar}$$

$$= -\frac{i}{\hbar} e^{-i\theta L_x/\hbar} (i\hbar \varepsilon_{1ij} V_j) e^{i\theta L_x/\hbar} = \varepsilon_{1ij} A_j$$

Buradan ;

$$\frac{dA_x}{d\theta} = \varepsilon_{11j} A_j = 0 \Rightarrow A_x(\theta) = A_x(0) = V_x$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dA_y}{d\theta} &= \varepsilon_{12j} A_j = A_z \\ \frac{dA_z}{d\theta} &= \varepsilon_{13j} A_j = -A_y \end{aligned}\right\} \frac{d^2A_y}{d\theta^2} = \frac{dA_z}{d\theta} = -A_y$$

Buradan $A_y(\theta) = A_y(0)\cos\theta + A_z(0)\sin\theta = V_y\cos\theta + V_z\sin\theta$

ve $A_z = \frac{dA_y}{d\theta} = -A_y(0)\sin\theta + A_z(0)\cos\theta = V_z\cos\theta - V_y\sin\theta$

Böylece ;

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = R_{ij} V_j$$

olur. Bu x ekseninde θ kadar dönme matrisidir.

b) $L_z|l,m\rangle = m\hbar|l,m\rangle$ dir.

Aradığımız şey $e^{-i\theta L_x/\hbar}|l,m\rangle$ nin L_z'in $-m\hbar$ özdeğerli özdurumu olup olmadığıdır.

$U(\pi)=e^{-i\pi L_x/\hbar}$ nun x ekseninde π kadarlık bir dönmeye karşılık geldiğini (a) şıkkında $\theta=\pi$ yazarak görebiliriz. Ancak (a) şıkkında dönen vektör operatörün kendisiydi. Şimdi durumun nasıl döndüğüne bakacağız.

$$L_z|l,m\rangle = m\hbar|l,m\rangle$$

$$U^{+}U=1$$

$$L_z U^{+}U|l,m\rangle = m\hbar|l,m\rangle$$

$$\Rightarrow UL_zU^{+}U|l,m\rangle = m\hbar U|l,m\rangle$$

L_z bir vektör operatörün bileşeni olduğuna göre (a) şıkkından biliyoruz ki

$$U(\pi)L_zU^{+}(\pi) = R_{zj}(\pi)L_j = -L_z$$

Böylece:

$$\underbrace{\left[U(\pi)L_zU^{+}(\pi)\right]}_{-L_z}U(\pi)|l,m\rangle = m\hbar U(\pi)|l,m\rangle$$

$$L_zU(\pi)|l,m\rangle = -m\hbar U(\pi)|l,m\rangle$$

Demek ki $U(\pi)|l,m\rangle$ dönüşmüş ket L_z operatörünün $-m\hbar$ özdeğerine karşılık gelen özdurumudur. Yani:

$$U(\pi)|l,m\rangle = |l,-m\rangle \text{ dir.}$$

ÖDEV 1) $[L_i, X_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}X_k$

$[L_i, P_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}P_k$ olduğunu gösterin.

SORU 2) $l=2$ için L^2 ve L_z operatörlerinin özdurumlarının konum uzayındaki temsillerini bulunuz. Bunların dik olduklarını gösteriniz.

ÇÖZÜM 2) $l=2$ için durum uzayının baz ketleri $|2,2\rangle$, $|2,1\rangle$, $|2,0\rangle$ $|2,-1\rangle$ ve $|2,-2\rangle$ dir. Bunların konum uzayındaki tasvirlerini bulmak için açısal momentum operatörü bileşenlerinin konum uzayı tasvirlerini kullanacağız.

$$L_z|l,m\rangle = m\hbar|l,m\rangle \Rightarrow \langle\theta,\phi|L_z|l,m\rangle = m\hbar\langle\theta,\phi|l,m\rangle$$

$\langle\theta,\phi|L_z|l,m\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\langle\theta,\phi|l,m\rangle$ olduğunu biliyoruz. Buradan;

$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\langle\theta,\phi|l,m\rangle = m\hbar\langle\theta,\phi|l,m\rangle \Rightarrow \langle\theta,\phi|l,m\rangle \propto e^{im\phi}$ olur.

Şimdi $L_+|2,2\rangle=0$ olmasından yararlanalım;

$$\langle\theta,\phi|L_+|2,2\rangle = -i\hbar e^{i\phi}\left(i\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\langle\theta,\phi|2,2\rangle = 0$$

$\langle\theta,\phi|2,2\rangle$ nin $e^{2i\phi}$ ile orantılı olduğunu yukarıda gösterdik. θ'ya bağlı kısma $F(\theta)$ dersek;

$\langle\theta,\phi|2,2\rangle = F(\theta)e^{2i\phi}$ olur. Bunu yukarıdaki denklemde yerine koyarsak

$$-i\hbar e^{i\phi}\left(i\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)[F(\theta)e^{2i\phi}]=0$$

$$\hbar e^{3i\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}F(\theta) + i\hbar e^{i\phi}\cot\theta\, F(\theta)(2i)e^{2i\phi}=0$$

Düzenlersek;

$$\frac{\partial}{\partial\theta}F(\theta) - 2\cot\theta\, F(\theta) = 0 \Rightarrow F(\theta)\propto\sin^2\theta \text{ olur.}$$

Böylece $\langle\theta,\phi|2,2\rangle = C e^{2i\phi}\sin^2\theta$ olur.

C'yi bulmak için normalize etmeliyiz.

$$1 = C^2\int d\theta d\phi \sin\theta\sin^4\theta = C^2 2\pi\int_0^\pi d\theta\sin\theta(1-\cos^2\theta)^2 = 2\pi C^2\int d\theta\sin\theta(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta)$$

$$=2\pi C^2\left(-\cos\theta+\frac{2}{3}\cos^3\theta-\frac{1}{5}\cos^5\theta\right)\Big|_0^\pi = 2\pi C^2\left(2-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\right) = \frac{32\pi C^2}{15} = 1 \Rightarrow C=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}$$

Böylece $\langle\theta,\phi|2,2\rangle = Y_2^2(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$ olur.

Bu durumdan yola çıkarak diğer durumları oluşturmak mümkün. Çünkü biliyoruz ki

$$L_-|2,2\rangle = \hbar\sqrt{2(2+1)-2(2-1)}\,|2,1\rangle = 2\hbar|2,1\rangle$$

$$\langle\theta,\phi|L_-|2,2\rangle = 2\hbar\langle\theta,\phi|2,1\rangle \Rightarrow -i\hbar e^{-i\phi}\left(-i\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)Y_2^2 = 2\hbar Y_2^1$$

Buradan;

$$Y_2^1(\theta,\phi) = -\frac{i}{2}e^{-i\phi}\left(-i\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,e^{i\phi}\cos\theta\sin\theta - \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\cot\theta\sin^2\theta\, e^{i\phi}$$

$$= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta\, e^{i\phi}$$ elde edilir.

Bu iki küresel harmonik fonksiyonunun dik oldukları kolayca gösterilebilir.

$$\int d\theta\, d\phi \sin\theta\, Y_2^{*2} Y_2^1 = K\int d\theta\, d\phi \sin^3\theta\cos\theta\, e^{-i\phi}$$

θ'ya bağlı integral $\sin^4\theta\Big|_0^\pi = 0$ olduğundan sonuç sıfır olur.

Diğer $Y_2^0, Y_2^{-1}, Y_2^{-2}$ ler de benzer şekilde bulunabilir. Ancak küresel harmoniklerin şu özelliğinden faydalanarak işlem sadece Y_2^0'ı bulmakla bitirilebilir:

$$Y_l^{-m}(\theta,\phi) = (-1)^m\left[Y_l^m(\theta,\phi)\right]^*$$

ÖDEV 2) $l=3$ için L^2 ve L_z'in özdurumlarının konum uzayındaki tasvirlerini bulunuz.

ÖDEV 3) $\psi = N(x+y+2z)\,e^{-\alpha r}$ ile tanımlanan bir durumda bulunan bir parçacık göz önüne alın.

a) $Y_1^{\pm1,0}$ ların x, y, z ve r cinsinden yazılarak

$$Y_1^{-1} - Y_1^1 = 2\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x}{r}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{r} \quad \text{ve} \quad Y_1^{-1} + Y_1^{+1} = -2i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{y}{r}$$

old. gösterin.

b) (a)'daki sonuçları kullanarak L_z ölçümü yapıldığında hangi değerlerin hangi olasılıklarla elde edileceğini bulun.