ÖDEV 1) L_z bazında;

$$|\psi\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$ durumunu gözönüne alalım.

Sistem üzerinde L_z^2 ölçümü yapılıyor ve $+\hbar^2$ bulunuyor. Sistemin ölçümden hemen sonra durumu ne olur. Bu sonucun bulunma olasılığı nedir. Eğer L_z ölçülürse hangi değerler hangi olasılıkla bulunur.

SORU 1) Bir parçacık demeti üzerinde L^2 ve L_z aynı anda ölçülüyor. Ölçüm sonucu $(l,m)=(0,0)$ ve $(1,-1)$ değerleri $3/4$ ve $1/4$ olasılıklarla bulunuyor.

a) Ölçümden önce demetin bulunduğu durumu oluşturun.

b) Demetteki $(l,m)=(1,-1)$ olan parçacıklar ayıklanıyor ve L_x ölçümü yapılıyor. Hangi değerler hangi olasılıklarla bulunur.

c) İkinci ölçüm sonucu oluşabilecek durumların uzaysal dalga fonksiyonunu bulun.

Çözüm 1)

a) L_z ve L^2 aynı anda ölçülebilir ve $|l,m\rangle$ ile gösterilen ortak özdurumlara sahiptirler. Böylece sistemin başlangıçtaki durumu;

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0,0\rangle + \frac{1}{2}e^{i\alpha}|1,-1\rangle$$

α : keyfi bir faz.

b) Sistemden $|1,-1\rangle$ durumlarını ayırarak, bunlar üzerinde L_x ölçümü yapacağız. Sistemin yeni durumu;

$$|\chi\rangle = |1,-1\rangle$$

L_x ölçümü yapıldığında elde edilecek sonuçları görebilmek için bu durumu $|l,m_x\rangle$ bazında yazmalıyız. Bunun için bazlar arasındaki dönüşüm katsayılarını bulmalıyız. $l=1$ olduğundan;

$$|1,m_x\rangle = c_-|1,-1\rangle + c_0|1,0\rangle + c_+|1,1\rangle$$

L_x uygularsak; $\left(L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}\right)$

$$m_x\hbar|1,m_x\rangle = \frac{c_-}{2}L_+|1,-1\rangle + c_0\left(\frac{L_+ + L_-}{2}\right)|1,0\rangle + c_+\frac{L_-}{2}|1,1\rangle$$

$$m_x\hbar|1,m_x\rangle = \frac{c_-}{\sqrt{2}}\hbar|1,0\rangle + \frac{c_0\hbar}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle + |1,-1\rangle) + \frac{c_+}{\sqrt{2}}|1,0\rangle$$

$$m_x|1,m_x\rangle = \left(\frac{c_- + c_+}{\sqrt{2}}\right)|1,0\rangle + \frac{c_0}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle + |1,-1\rangle)$$

Bunu başladığımız durumla karşılaştırırsak;

$$\sqrt{2}m_x c_0 = c_- + c_+$$

$$\sqrt{2}m_x c_+ = c_0 = \sqrt{2}m_x c_-$$

Böylece $m_x = 1 \Rightarrow |l, m_x = 1\rangle = \frac{1}{2}|1,-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{2}|1,1\rangle$ (1)

$m_x = -1 \Rightarrow |l, m_x = -1\rangle = \frac{1}{2}|1,-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{2}|1,1\rangle$ (2)

$m_x = 0$ için bu durumlara dik bir durum daha bulmalıyız.

$|1,m_x=0\rangle = a|1,1\rangle + b|1,0\rangle + c|1,-1\rangle$ olsun.

$$\left.\begin{aligned} \langle 1,m_x=-1|1,m_x=0\rangle = 0 &= \frac{a}{2} - \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{c}{2} \\ \langle 1,m_x=+1|1,m_x=0 = 0 &= \frac{a}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{c}{2} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} b &= 0 \\ a &= -c \end{aligned}$$

Böylece;

$|1,m_x=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle - |1,-1\rangle)$ bulunur. (3)

Buradan ters dönüşüm yaparak $|1,-1\rangle$ durumunu $|1,m_x\rangle$'ler cinsinden bulabiliriz.

$|1,-1\rangle = \frac{1}{2}|1,m_x=1\rangle + \frac{1}{2}|1,m_x=-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,m_x=0\rangle$ olur.

Bu durum üzerinde L_x ölçümü yapılırsa

$P(L_x=+\hbar) = 1/4$, $P(L_x=-\hbar) = 1/4$ $P(L_x=0) = 1/2$

c) Sistem $|1,m_x=1\rangle$, $|1,m_x=-1\rangle$, $|1,m_x=0\rangle$ durumlarına düşebilir. Bunların $|l,m\rangle$ cinsinden yazabildiğimiz için uzaysal dalga fonksiyonunu küresel harmoniklerin lineer kombinasyonu olarak yazabiliriz.

(1)'den $\psi_+(\theta,\phi) = \frac{1}{2}Y_1^{-1}(\theta,\phi) + \frac{1}{\sqrt{2}}Y_1^0(\theta,\phi) + \frac{1}{2}Y_1^{+1}(\theta,\phi)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\sin\theta e^{-i\phi} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2}\cos\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\sin\theta e^{-i\phi} = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}(\cos\theta - i\sin\theta\sin\phi)$$

Benzer şekilde

$$Y_{-}(\theta,\phi) = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} (-\cos\theta - i\sin\theta\sin\phi)$$

ve

$$Y_0(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\phi\sin\theta \quad \text{elde edilir.}$$

<u>ÖDEV 2)</u> Önceki sorunun (b) şıkkında yaptığımız işlem L_x'in özdurumlarını L_z operatörü bazında bulmak ve daha sonra ters dönüşüm yaparak L_z'in özdurumlarını L_x bazında yazmaktı. Bu işlemi daha sistematik olarak yapmak için

a) L_x operatörünün matris elemanlarını L_z bazında bulunuz. Bunun için $L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}$ eşitliğini kullanınız. ($l=1$ için)

b) (a) şıkkında bulduğunuz matrisin, yani L_x operatörün özdeğer ve özdurumlarını bulunuz. Bulduğunuz özdurumlar $|1, m_x\rangle$ durumlarının $|1,m\rangle$ bazındaki açılımı olacaktır.

c) Özdurumlardan, L_x'i köşegenleştiren matrisi bulunuz. Bu matrisin tersini kullanarak $|1,m\rangle$ durumlarını $|1,m_x\rangle$ durumları cinsinden bulunuz.

d) (a), (b) ve (c) şıkkındaki işlemleri L_y operatörü için tekrarlayınız.

SORU 2) Bir protonun Coulomb potansiyelinde hareket eden bir e^- $|\psi\rangle = \frac{4}{5}|1,0,0\rangle + \frac{3i}{5}|2,1,1\rangle$ durumunda bulunmaktadır. Burada $|n,l,m\rangle$ H atomunun standart enerji özdurumlarıdır.

a) Bu durum için $\langle E\rangle$ nedir? $\langle L^2\rangle$, $\langle L_z\rangle$ nedir?

b) t anında $|\psi(t)\rangle = ?$ (a) şıkkındaki hangi beklenen değerler zamana göre değişir.

Çözüm 2)

a) $$\langle\psi|H|\psi\rangle = \left(\frac{4}{5}\langle 1,0,0| - \frac{3i}{5}\langle 2,1,1|\right) H \left(\frac{4}{5}|1,0,0\rangle + \frac{3i}{5}|2,1,1\rangle\right)$$

$$= \frac{16}{25}E_1 + \frac{9}{25}E_2 = \frac{16}{25}E_1 + \frac{9}{25}\cdot\frac{1}{4}E_1 = \frac{73}{100}E_1$$

$$\langle L^2\rangle = \hbar^2 0(0+1)P(l=0) + \hbar^2 1(1+1)P(l=1) = 2\hbar^2 \frac{9}{25} = \frac{18\hbar^2}{25}$$

$$\langle L_z\rangle = 0.P(m=0) + \hbar P(m=1) = \frac{9}{25}\hbar$$

b) $$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle = \frac{4}{5}e^{-iE_1t/\hbar}|1,0,0\rangle + \frac{3i}{5}e^{-iE_2t/\hbar}|2,1,1\rangle$$

Beklenen değerlerin zamana bağlı olup olmadığını görmek için Ehrenfest teoremini kullanabiliriz.

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle [H, A]\rangle$$

$\langle E\rangle$ için $[H, H]=0$

$\langle L^2\rangle$ için $[H, L^2]=0$ olduğundan beklenen değerler zamana bağlı değildir.

$\langle L_z\rangle$ için $[H, L_z]=0$

SORU 3) H atomunun taban durumunda bulunan bir $\bar{e}$ nun klasik olarak izin verilen bölgenin dışına çıkma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM 3) Klasik olarak $\bar{e}$, kinetik enerjisinin sıfır olduğu noktadan geri döner. Yani toplam enerjisinin tamamı potansiyel enerji iken.

$$-\frac{e^2}{r_{max}} = E_1 = -\frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2 \Rightarrow r_{max} = \frac{2e^2}{m\alpha^2c^2} = \frac{2e^2}{m\frac{e^4}{\hbar^2c^2}c^2} = \frac{2\hbar^2}{me^2} = 2a_0$$

Taban durumu için radyal dalga fonksiyonu;

$$R_{10}(r) = 2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}e^{-r/a_0} \quad \text{idi.}$$

Parçacığı r_{max} yarıçapının dışında bulma olasılığı;

$$P(r \geq r_{max}) = \int_{2a_0}^{\infty} dr\, r^2 R_{10}^2 = \int_{2a_0}^{\infty} \frac{4}{a_0^3} e^{-2r/a_0} r^2 dr$$

$$= \frac{4}{a_0^3}\left[\frac{r^2 e^{-2r/a_0}}{(-2/a_0)} - \frac{2}{(-2/a_0)}\frac{e^{-2r/a_0}}{(-2/a_0)^2}\left(-\frac{2r}{a_0} - 1\right)\right]\Bigg|_{2a_0}^{\infty} = \frac{4e^{-4}}{a_0^3}\left[2a_0^3 + \frac{5}{4}a_0^3\right] = 0{,}24$$

SORU 4) $t=0$ anında H atomunun dalga fonksiyonu

$$\psi(\vec{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(2\psi_{100} + \psi_{210} + \sqrt{2}\,\psi_{211} + \sqrt{3}\,\psi_{21-1}\right)$$

olarak veriliyor. Alt indisler (nlm) kuantum sayılarını göstermektedir.

a) Enerjinin beklenen değerini bulun.

b) Sistemin $l=1, m=+\hbar$ durumunda bulunma olasılığını zamanın fonksiyonu olarak bulun.

c) $t=0$ anında elektronun protondan 10^{-10} cm'lik bir bölge içinde bulunma olasılığını (yaklaşık olarak) bulun.

d) $L=1$ ve $L_x=+1$ bulunan bir ölçüm yapıldığını varsayın. Dalga fonksiyonu bu ölçümden hemen sonra hangi durumda bulunur?

Çözüm 4)

a) $$\langle E\rangle = \sum_n E_n P(E_n) = \frac{1}{10}(4E_1 + E_2 + 2E_2 + 3E_2) = \frac{1}{5}(2E_1 + 3E_2) = \frac{1}{5}\left(2E_1 + \frac{3}{4}E_1\right)$$

$$= \frac{11}{20}E_1 = -7{,}47\,eV$$

b) t anında sistemin $l=1$ $m=+\hbar$ de bulunma olasılığı;

$$P(t) = |\langle 2,1,1|\psi(t)\rangle|^2 = |\langle 2,1,1|e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle|^2$$

$$= \left|\langle 2,1,1|\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}\left(e^{-iE_1t/\hbar}|1,0,0\rangle + e^{-iE_2t/\hbar}(|2,1,0\rangle + \sqrt{2}|2,1,1\rangle + \sqrt{3}|2,1,-1\rangle)\right)\right\}\right|^2$$

$$= \frac{1}{5}$$

c) $$P(r<10^{-10}\,cm, t=0) = \frac{1}{10}\int_0^{10^{-10}}(4R_{10}^2 + 6R_{21}^2)r^2\,dr$$

$R_{10}^2 = \frac{4}{a_0^3}e^{-2r/a_0}$ ve $R_{21}^2 = \frac{r^2}{24a^5}e^{-r/2a}$ olduğunu biliyoruz.

$a_0 = 5{,}3\times10^{-9}$ cm ve bu değer 10^{-10}'a kıyasla ~ 50 kat büyük olduğundan;

$R_{10}^2 \cong \frac{4}{a^3}\left(1-\frac{2r}{a}\right)$ $\quad R_{21}^2 \cong \frac{r^2}{24a^5}\left(1-\frac{r}{2a}\right)$ diyebiliriz.

Bu değerler integralde yerine yazılırsa

$P(r<10^{-10}\,cm, t=0) \cong \frac{8}{15}\left(\frac{10^{-10}}{a_0}\right)^3 = 3{,}6\times10^{-6}$ elde edilir.

d) $n \geq L+1$ olacağından $L=1$ ölçülmüş ise sistem $n=2$ de bulunmuş demek.

Ölçümden sonra $|\psi\rangle = C_0|2,1,0\rangle + C_+|2,1,1\rangle + C_-|2,1,-1\rangle$ gibi bir durumda.

Ölçüm sonucunda $L_x = 1$ olduğundan

$L_x|\psi\rangle = |\psi\rangle$ olmalı.

$C_0 L_x|2,1,0\rangle + C_+ L_x|2,1,1\rangle + C_- L_x|2,1,-1\rangle = C_0|2,1,0\rangle + C_+|2,1,1\rangle + C_-|2,1,-1\rangle$

$L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}$ yazarsak;

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}C_0|2,1,1\rangle + \sqrt{2}(C_+ + C_-)|2,1,0\rangle + \sqrt{2}C_0|2,1,-1\rangle\right)$$

$$= C_0|2,1,0\rangle + C_+|2,1,1\rangle + C_-|2,1,-1\rangle \text{ olur.}$$

Buradan;

$C_+ = C_- = \frac{C_0}{\sqrt{2}}$ bulunur.

Böylece;

$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}|2,1,0\rangle + |2,1,1\rangle + |2,1,-1\rangle\right)$ elde edilir.