1) Konum ve momentum operatörlerinin matris elemanlarını Harmonik osilatör enerji özdurumları bazında bulunuz. Bunların $[X,P]=i\hbar$ komütasyon ilişkisini sağladığını gösterin.

$$\hat{X}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^+) \qquad \hat{P}=-i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a-a^+)$$

$$\langle n|\hat{X}|m\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle n|(a+a^+)|m\rangle$$

$$=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Big(\langle n|a|m\rangle+\langle n|a^+|m\rangle\Big)=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\sqrt{m}\langle n|m-1\rangle+\sqrt{m+1}\langle n|m+1\rangle\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\sqrt{m}\,\delta_{n,m-1}+\sqrt{m+1}\,\delta_{n,m+1}\right\}$$

$$\langle n|P|m\rangle=-i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\langle n|(a-a^+)|m\rangle=-i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left\{\sqrt{m}\,\delta_{n,m-1}-\sqrt{m+1}\,\delta_{n,m+1}\right\}$$

elde edilir.

$$[X,P]=XP-PX=X\sum_n|n\rangle\langle n|P-P\sum_m|m\rangle\langle m|X$$

$$\langle n'|[X,P]|m'\rangle=\sum_n\langle n'|X|n\rangle\langle n|P|m'\rangle-\sum_m\langle n'|P|m\rangle\langle m|X|m'\rangle$$

$$=\sum_n\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\sqrt{n}\,\delta_{n',n-1}+\sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1}\right\}\left(-i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\right)\left\{\sqrt{m'}\,\delta_{n,m'-1}-\sqrt{m'+1}\,\delta_{n,m'+1}\right\}$$

$$-\sum_m\left(-i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\right)\left\{\sqrt{m}\,\delta_{n',m-1}-\sqrt{m+1}\,\delta_{n',m+1}\right\}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\sqrt{m'}\,\delta_{m,m'-1}+\sqrt{m'+1}\,\delta_{m,m'+1}\right\}$$

$$=-\frac{i\hbar}{2}\left(\sqrt{n'+1}\sqrt{m'}\,\delta_{n',m'-2}-\sqrt{n'+1}\sqrt{m'+1}\,\delta_{n',m'}+\sqrt{n'}\sqrt{m'}\,\delta_{n',m'}-\sqrt{n'}\sqrt{m'+1}\,\delta_{n',m'-2}\right)$$

$$+\frac{i\hbar}{2}\left(\sqrt{n'+1}\sqrt{m'}\,\delta_{n',m'-2}+\sqrt{n'+1}\sqrt{m'+1}\,\delta_{n',m'}-\sqrt{n'}\sqrt{m'}\,\delta_{n',m'}-\sqrt{n'}\sqrt{m'+1}\,\delta_{n',m'-2}\right)$$

$$=\frac{i\hbar}{2}\left\{2(n'+1)\,\delta_{n',m'}-2n'\,\delta_{n',m'}\right\}$$

$$=\frac{i\hbar}{2}\left\{2n'+2-2n'\right\}\delta_{n',m'}=i\hbar\,\delta_{n',m'}=i\hbar\langle n'|m'\rangle.$$

2) Tek boyutta bir Harmonik osilatör potansiyelindeki bir parçacık, enerji ölçümü sonucu $\frac{1}{2}\hbar\omega$ ve $\frac{3}{2}\hbar\omega$ enerjilerinin eşit olasılıkta olduğu bir durumda bulunuyor. Parçacığın $t=0$ anındaki ortalama momentumu $\left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right)^{1/2}$ dir. Bu bilgiler parçacığın durumunu tanımlamak için yeterlidir.

Parçacığın bir t anındaki momentum, konum beklenen değerlerini bulunuz. $\langle p^2\rangle$ ve $\langle x^2\rangle$ yi de bularak $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2$ olduğunu gösteriniz.

H.O. için $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$.

$\frac{1}{2}\hbar\omega \rightarrow n=0$, $\frac{3}{2}\hbar\omega \rightarrow n=1$ seviyelerine karşılık geliyor.

Sistemin durumu $|\psi\rangle = c_1|0\rangle + c_2|1\rangle$

ve bunlar eşit olasılıkta ise $|c_1|^2 = |c_2|^2$ (1)

$$\langle p\rangle = \langle\psi|P|\psi\rangle = (c_1^*\langle 0| + c_2^*\langle 1|)\,P\,(c_1|0\rangle + c_2|1\rangle)$$

$$= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(c_1^*\langle 0| + c_2^*\langle 1|)(a-a^\dagger)(c_1|0\rangle + c_2|1\rangle)$$

$$= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(c_1^*\langle 0| + c_2^*\langle 1|)(c_2|0\rangle - c_1|1\rangle)$$

$$= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(c_1^*c_2 - c_2^*c_1) = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}$$

$\Rightarrow c_1^*c_2 - c_2^*c_1 = i$ olmalı. (2)

(1) ve (2) eşitliklerinden $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $c_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}$ seçilebilir.

Böylece sistemin durumu : $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ olur.

Bir t anında $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle + i e^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle\right)$

$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ ve $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$.

$$\langle P\rangle(t)=\langle\psi(t)|P|\psi(t)\rangle$$

$$=-i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,\frac{1}{2}\left\{\left(e^{iE_0t/\hbar}\langle 0|-ie^{iE_1t/\hbar}\langle 1|\right)(a-a^{+})\left(e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle+ie^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle\right)\right.$$

$$=-i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,\frac{1}{2}\left\{\left(e^{iE_0t/\hbar}\langle 0|-ie^{iE_1t/\hbar}\langle 1|\right)\left(-e^{-iE_0t/\hbar}|1\rangle+ie^{-iE_1t/\hbar}|0\rangle\right)\right.$$

$$=\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,\frac{1}{2}\left(e^{i(E_0-E_1)t/\hbar}+e^{-i(E_0-E_1)t/\hbar}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\cos\left((E_0-E_1)t/\hbar\right)=\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\cos(\omega t)$$ elde edilir.

$$\langle X\rangle(t)=\langle\psi(t)|X|\psi(t)\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\left(e^{iE_0t/\hbar}\langle 0|-ie^{iE_1t/\hbar}\langle 1|\right)(a+a^{+})\left(e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle+ie^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{e^{iE_0t/\hbar}\langle 0|-ie^{iE_1t/\hbar}\langle 1|\right)\left(e^{-iE_0t/\hbar}|1\rangle+ie^{-iE_1t/\hbar}|0\rangle\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(ie^{i(E_0-E_1)t/\hbar}-ie^{-i(E_0-E_1)t/\hbar}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{e^{i(E_1-E_0)t/\hbar}-e^{-i(E_1-E_0)t/\hbar}}{2i}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sin\left((E_1-E_0)t/\hbar\right)=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sin(\omega t)$$

$$\langle P^2\rangle(t)=\langle\psi(t)|P^2|\psi(t)\rangle$$

$$=-\frac{m\hbar\omega}{2}\,\frac{1}{2}\left\{e^{iE_0t/\hbar}\langle 0|-ie^{iE_1t/\hbar}\langle 1|\right\}(a-a^{+})(a-a^{+})\left\{e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle+ie^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle\right\}$$

$$=-\frac{m\hbar\omega}{2}\,\frac{1}{2}\left\{e^{iE_0t/\hbar}\langle 0|-ie^{iE_1t/\hbar}\langle 1|\right\}(aa-aa^{+}-a^{+}a+a^{+}a^{+})\left\{e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle+ie^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle\right\}$$

$$=+\frac{m\hbar\omega}{2}\,\frac{1}{2}\left\{e^{iE_0t/\hbar}\langle 0|-ie^{iE_1t/\hbar}\langle 1|\right\}(2a^{+}a+1)\left\{e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle+ie^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle\right\}$$

$$=\frac{m\hbar\omega}{2}\,\frac{1}{2}(2+2)=m\hbar\omega$$

$$\langle x^2\rangle(t) = \langle \psi(t)|x^2|\psi(t)\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\frac{1}{2}\left\{e^{iE_0t/\hbar}\langle 0| - ie^{iE_1t/\hbar}\langle 1|\right\}(a+a^+)(a+a^+)\left\{e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle + ie^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\frac{1}{2}\left\{e^{iE_0t/\hbar}\langle 0| - ie^{iE_1t/\hbar}\langle 1|\right\}\left(\underbrace{aa^+ + a^+a}_{2a^+a+1}\right)\left\{e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle + ie^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{m\omega}$$

$$\Delta X = \sqrt{\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega} - \frac{\hbar}{2m\omega}\sin^2(\omega t)}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(2 - \sin^2(\omega t)\right)^{1/2}$$

$$\Delta P = \sqrt{\langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}(2-\cos^2(\omega t))} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(2-\cos^2(\omega t)\right)^{1/2}$$

$$\Delta p\Delta x = \frac{\hbar}{2}\left(4-2+\frac{\sin^2(2\omega t)}{4}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(2+\frac{\sin^2(2\omega t)}{4}\right)^{1/2} > \frac{\hbar}{2}$$

Burada beklenen değerlerin klasik denklemlere uyduğunu, yani Ehrenfest teoreminin bir uygulamasını görebiliriz.

Ehrenfest teoremine göre:

$$m\frac{d}{dt}\langle X\rangle = \langle P\rangle \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dt}\langle P\rangle = -\left\langle\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle \text{ olmalıdır.}$$

Genel olarak herhangi bir A operatörü için :

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [A,H]\rangle + \left\langle\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle \text{ yazılabilir.}$$

Bunun özel bir hali yukarıdaki $\langle X\rangle$ ve $\langle P\rangle$ için elde edilmiş olan denklemlerdir ki bunlar klasik mekaniğin denklemleridir. Şimdi bu denklemlerin doğruluğunu bulmuş olduğumuz ortalama değerleri kullanarak test edelim.

$$m\frac{d}{dt}\langle X\rangle(t) = m\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sin(\omega t)\right) = m\omega\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos(\omega t) = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\cos(\omega t)$$

$$= \langle P\rangle$$

$$-\left\langle\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle = -\left\langle\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}m\omega^2X^2\right\rangle = -\left\langle m\omega^2 X\right\rangle = -m\omega^2\langle X\rangle$$

$$= -m\omega^2\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sin(\omega t) = -\omega\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\sin(\omega t)$$

$$\frac{d}{dt}\langle P\rangle(t) = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\cos(\omega t)\right) = -\omega\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\sin(\omega t)$$

Böylece $-\left\langle\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle = \frac{d\langle P\rangle}{dt}$ olduğu görülür.