SORU 1) q yüklü m kütleli parçacık tek boyutta bir harmonik kuvvet ve homojen elektrik alan altında hareket ediyor. Sistemin Hamiltonyeni;

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 - q\mathcal{E}X \qquad (\mathcal{E}: \text{elektrik alan şiddeti})$$

olarak yazılabilir.

a) Enerji özdeğerlerini bulunuz.

b) $H = H_0 + H_1$ olarak ele alınırsa H_0 harmonik osilatör hamiltonyeni ve $H_1 = -q\mathcal{E}X$ elektrik alandan gelen katkı olarak düşünülebilir. Sistem $t=0$'da H_0'ın taban durumunda ise t anında H'ın taban durumunda bulunma olasılığı ne olur?

ÇÖZÜM 1)

a) $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(X - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}$ olarak yazılabilir.

İlk iki terim $\hat{X} = X - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}$ koordinatında yazılmış bir Harmonik osilatör Hamiltonyenidir. İkinci terim ise her bazda köşegen olacak olan sabit bir sayıdır. Dolayısıyla $\hat{X}$ koordinatındaki H.O. bazı Hamiltonyenin bazıdır. Böylece;

$$H = \left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}$$ şeklinde yaratma_yoketme operatörleri ile yazılabilir.

Özdurumlar $\hat{a}^+\hat{a}$ nın özdurumları, yani $\{|\hat{n}\rangle\}$ $(n=0,1,2\ldots)$ ve özdeğerler de $\hat{E}_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}$ olur.

b) H_0'ın özdurumları $\{|n\rangle\}$

H'ın özdurumları $\{|\hat{n}\rangle\}$

$t=0$ anında sistem H_0'ın taban durumunda ise; $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$

t anında sistemin H'ın taban durumunda, yani $|\hat{0}\rangle$ da bulunma olasılığı: $P = |\langle\hat{0}|\psi(t)\rangle|^2$ dir.

$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|0\rangle$ dır.

$|0\rangle$, H'ın özdurumu olmadığından $e^{-iHt/\hbar}|0\rangle$ işlemini doğrudan yapamayız. Bu işlemi yapabilmek için $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$'ı, H'ın bazında açalım;

$$|0\rangle = \sum_n |\tilde{n}\rangle\langle\tilde{n}|0\rangle$$

$$e^{-iHt/\hbar}|0\rangle = \sum_n e^{-iHt/\hbar}|\tilde{n}\rangle\langle\tilde{n}|0\rangle$$

$|\tilde{n}\rangle$ H'ın $\tilde{E}_n$ özdeğerli özdurumu olduğundan $e^{-iHt/\hbar}|\tilde{n}\rangle = e^{-i\tilde{E}_n t/\hbar}|\tilde{n}\rangle$ olur. Böylece;

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|0\rangle = \sum_n e^{-i\tilde{E}_n t/\hbar}|\tilde{n}\rangle\langle\tilde{n}|0\rangle$$ elde edilir.

Buradan;

$$\langle\tilde{0}|\psi(t)\rangle = \sum_n e^{-i\tilde{E}_n t/\hbar}\underbrace{\langle\tilde{0}|\tilde{n}\rangle}_{\delta_{n,0}}\langle\tilde{n}|0\rangle = e^{-i\tilde{E}_0 t/\hbar}\langle\tilde{0}|0\rangle$$

$$P = |\langle\tilde{0}|\psi(t)\rangle|^2 = |\langle\tilde{0}|0\rangle|^2$$ haline gelir.

Bunu bulabilmek için $|\tilde{0}\rangle$ ile $|0\rangle$ arasındaki ilişkiyi bulabilmemiz gerekiyor.

H, $\tilde{x} = x - q\varepsilon/m\omega^2$ deki Harmonik osilatör, H_0 ise x'deki harmonik osilatör hamiltonyeni idi. Dolayısıyla iki sistem arasında bir öteleme dönüşümü var.

Konum bazında düşünürsek, H_0'ın özfonksiyonu ile H'ın özfonksiyonu arasında da bir öteleme dönüşümü olmalı. $q\varepsilon/m\omega^2 = l$ diyelim;

$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$: H_0'ın özfonksiyonu
$\tilde{\psi}_n(x) = \langle x|\tilde{n}\rangle$: H'ın özfonksiyonu

$\tilde{\psi}_n(x-l) = \psi_n(x)$ olmalı.

Bunu ketler cinsinden yazarsak:

$$\langle x-l|\tilde{n}\rangle = \langle x|n\rangle$$ olmalı.

$|\tilde{n}\rangle$ ile $|n\rangle$ arasındaki ilişkiyi belirlemek için öteleme operatörü tanımlayalım. Öyle ki $U(l)$ öteleme operatörü olmak üzere $U(l)|x\rangle = |x+l\rangle$ versin.

Böylece $\langle x-\ell| = \langle x|U(\ell)$ şeklinde yazılabilir.

Böylece ;

$\langle x-\ell|\tilde{n}\rangle = \langle x|n\rangle$ eşitliği $\langle x|U^{+}(\ell)|\tilde{n}\rangle = \langle x|n\rangle$ haline gelir.

Buradan $U^{+}(\ell)|\tilde{n}\rangle = |n\rangle$ veya $|n\rangle = U(\ell)|\tilde{n}\rangle$ sonucunu elde ederiz.

Şimdi $U(\ell)$ operatörünün ne olduğunu bularak $|n\rangle$ ile $|\tilde{n}\rangle$ arasındaki ilişkiyi bulabiliriz. $e^{-iHt/\hbar}$ zamanda öteleme operatörü idi. Uzaysal ötelemeler için benzer bir operatör tanımlayabiliriz : $U(\ell) = e^{-iP\ell/\hbar}$.

Bu operatörün öteleme yapıp yapmadığını kolayca gösterebiliriz.

$$\langle x|U(\ell)|\psi\rangle = \langle x|e^{-iP\ell/\hbar}|\psi\rangle = \langle x|\left\{1 - \frac{i\ell}{\hbar}P + \frac{1}{2!}\left(\frac{-i\ell}{\hbar}\right)^2 P + \cdots\right\}|\psi\rangle$$

$$= \underbrace{\langle x|\psi\rangle}_{\psi(x)} + (-\ell)\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\langle x|\psi\rangle}_{\psi(x)} + \frac{1}{2!}(-\ell)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\underbrace{\langle x|\psi\rangle}_{\psi(x)} + \cdots$$

$= \psi(x-\ell) = \langle x-\ell|\psi\rangle$ olur.

Böylece

$|n\rangle = e^{-iP\ell/\hbar}|\tilde{n}\rangle$ elde edilir.

$$\langle\tilde{0}|0\rangle = \langle 0|e^{-iP\ell/\hbar}|0\rangle$$

$$e^{-iP\ell/\hbar} = e^{-\frac{\ell}{\hbar}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a-a^{+})} = e^{+\frac{\ell}{\hbar}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}a^{+}}\, e^{-\frac{\ell}{\hbar}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}a}\, e^{+\frac{\ell^2 m\omega}{4\hbar}[a^{+},a]}$$

(Hatırlatma $e^{A+B} = e^{A}e^{B}e^{-[A,B]/2} = e^{B}e^{A}e^{-[B,A]/2}$.)

$\langle 0|e^{-iP\ell/\hbar}|0\rangle = e^{-\ell^2 m\omega/4\hbar}\langle 0|0\rangle$ elde edilir.

$P = |\langle\tilde{0}|0\rangle|^2 = e^{-\ell^2 m\omega/2\hbar}$ elde edilir.

$\ell = q\mathcal{E}/m\omega^2$ yerine yazarsak;

$P = \exp\left(-\frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^3\hbar}\right)$ elde edilir.

SORU 2) Tek boyutta bir harmonik osilatör ele alın. Özdurumlar $\{|n\rangle\}$ olsun

a) $|0\rangle$ ve $|1\rangle$'in lineer kombinasyonu olan öyle bir durum oluşturun ki $\langle x\rangle$ maksimum olsun.

b) $t=0$ anında sistemin (a) daki durumda bulunduğunu varsayarak:

→ Schrödinger resminde t anındaki $\langle x\rangle(t)$ yi bulun.

→ Heisenberg resminde t anındaki $\langle x(t)\rangle$ yi bulun.

ÇÖZÜM 2) a) $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ olsun.

$$\langle x\rangle = \left(\langle 0|c_0^* + \langle 1|c_1^*\right)\left(\alpha(a+a^+)\right)\left(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle\right) \quad \left(\alpha: \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)$$

$$= \alpha(c_0^*c_1 + c_1^*c_0) \quad \text{dır.}$$

$c_0 = |c_0|e^{i\delta_0}$ ve $c_1 = |c_1|e^{i\delta_1}$ olarak yazabiliriz.

Buradan;

$$\langle x\rangle = \alpha|c_0||c_1|\left(e^{i(\delta_1-\delta_0)} + e^{-i(\delta_1-\delta_0)}\right) = 2\alpha|c_0||c_1|\cos(\delta_1-\delta_0)$$

Bu ifadenin maximum değeri $\delta_1-\delta_0 = 2\pi n$ $(n=0,1...)$ olduğunda dır. O halde $\delta_0=0$ ve $\delta_1 = 2\pi$ seçebiliriz. Böylece:

$c_0 = |c_0|$ ve $c_1 = |c_1|$ elde edilir.

Öte yandan $|c_0||c_1|$ çarpımının da max olması için $|c_0| = |c_1|$ olmalıdır. Böylece

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) \quad \text{elde edilir.}$$

b) i) Schrödinger resminde;

Sistemin durumu zamanla değişecek: $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t/2}|0\rangle + e^{-3i\omega t/2}|1\rangle\right) \quad \text{dır.}$$

$$\langle x\rangle(t) = \langle\psi(t)|X|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(e^{+i\omega t/2}\langle 0| + e^{3i\omega t/2}\langle 1|\right)(a+a^+)\left(e^{-i\omega t/2}|0\rangle + e^{-3i\omega t/2}|1\rangle\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos(\omega t) \quad \text{elde edilir.}$$

ii) Heisenberg resminde sistemin durumu değişmez, operatörler zamanla değişir Heisenberg hareket denklemine göre değişir.

$$\frac{d}{dt}\hat{X} = \frac{1}{i\hbar}[X,H] = \frac{1}{m}\hat{P}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{P} = \frac{1}{i\hbar}[X,H] = m\omega^2\hat{X}$$

İlk denklem zamana göre türetilip, ikinci denklemden dP/dt yerine yazılırsa

$$\ddot{X} = \omega^2 X \implies X(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

Buradan $P(t) = Am\omega\cos(\omega t) - Bm\omega\sin(\omega t)$ olur.

A ve B $t=0$ yazılarak ; $A = P(0)/m\omega$ $B = X(0)$ elde edilir.

Böylece

$$\langle X(t)\rangle = \frac{1}{2}\langle\psi|X(t)|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\langle\psi|P(0)|\psi\rangle}{m\omega}\sin(\omega t) + \langle\psi|X(0)|\psi\rangle\cos(\omega t)\right)$$

$$= \frac{1}{m\omega}\langle P(0)\rangle\sin(\omega t) + \langle X(0)\rangle\cos(\omega t)$$

$t=0$'da $\langle P(0)\rangle$ hesaplanırsa sıfır olduğu görülür.

$t=0$'da Schr resmi ve Heisenberg resmi operatörleri ve durumları aynı olduğundan $\langle X(0)\rangle_{Heisenberg} = \langle X\rangle(0)_{schrodinger} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$

Buradan;

$$\langle X(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos(\omega t) \text{ bulunur.}$$