SORU m kütleli parçacık $0<x<a$ aralığındaki sonsuz kuyuda bulunuyor. Sistemin başlangıç durumu:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{10a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + A\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \frac{3}{\sqrt{5a}} \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$$

olduğuna göre:

a) $\psi(x)$ in normalize olması için A ne olmalıdır

b) Enerji ölçüldüğünde hangi değer hangi olasılıkla bulunur.

c) Enerji ölçümü yapılıyor ve $2\pi^2\hbar^2/ma^2$ bulunuyor. Ölçümden hemen sonra sistemin durumu nedir?

d) Bu durumda $\langle x\rangle$, $\langle p_x\rangle$, $\langle x^2\rangle$ ve $\langle p_x^2\rangle$ yi bulun. Δx ve Δp_x yi hesaplayarak $\Delta p_x \Delta x$ çarpımının Heisenberg belirsizlik ilkesine uyduğunu gösterin.

Çözüm

a) Enerji özdurumları sonsuz kuyu potansiyeli için $(0<x<a)$:

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad \text{ve} \quad E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2} \quad \text{dir.}$$

Sistemin $|\psi\rangle$ durumu enerji özdurumları cinsinde yazılabilir:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle \Rightarrow \underbrace{\langle x|\psi\rangle}_{\psi(x)} = \sum_n c_n \underbrace{\langle x|\phi_n\rangle}_{\phi(x)}$$

Sistemin verilen durumu ile karşılaştırıldığında:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{20}}\phi_1(x) + A\phi_2(x) + \frac{3}{\sqrt{10}}\phi_3(x)$$ olduğu görülmektedir.

yani:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{20}}|\phi_1\rangle + A|\phi_2\rangle + \frac{3}{\sqrt{10}}|\phi_3\rangle$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 = \frac{1}{20} + A^2 + \frac{9}{10} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{20}}$$ elde edilir.

b) $P(E_1) = \dfrac{|\langle\phi_1|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \dfrac{1}{20}$ $\quad P(E_2) = \dfrac{|\langle\phi_2|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \dfrac{1}{20}$

$P(E_3) = \dfrac{|\langle\phi_3|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \dfrac{9}{10}$ elde edilir.

c) $E_n = \dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \dfrac{2\pi\hbar^2}{ma^2} \Rightarrow n=2$ olmalıdır.

Böylece sistem E_2 enerjisini veren özdurumа, yani $|\phi_2\rangle$ durumuna çöker.

d) $\langle x\rangle = \langle\phi_2|\hat{X}|\phi_2\rangle = \int_0^a dx\, \langle\phi_2|x\rangle\langle x|\hat{X}|\phi_2\rangle$

$= \int dx\, \langle\phi_2|x\rangle\langle x|\phi_2\rangle\, x = \int_0^a dx\, \phi_2^*(x)\,\phi_2(x)\, x$ olur.

$\phi_2(x)$'i yerine yazarsak;

$$\langle x\rangle = \frac{2}{a}\int_0^a dx\, \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)x = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} dx\, \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)(x+a/2)$$

$$= \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} dx\, \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)x + \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} dx\, \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\frac{a}{2}$$

İlk integralde $x \to -x$ dönüşümü yaparsak integral eksi işaretlisine döner. Dolayısıyla ilk integral sıfırdır. İkinci integral yarım açı formülleri kullanılarak;

$$\int_{-a/2}^{a/2} dx\, \frac{1-\cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right)}{2} = \frac{x}{2}\Big|_{-a/2}^{a/2} - \frac{1}{2}\frac{a}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right)\Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{a}{2} \quad \text{olur.}$$

$$\langle p_x\rangle = \langle\phi_2|\hat{P}_x|\phi_2\rangle = \int_0^a dx\, \phi_2^*(x)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\phi_2(x)$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^a dx\, \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)(-i\hbar)\frac{2\pi}{a}\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^a dx \left(-\frac{2i\hbar}{a}\right)\frac{1}{2}\sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right) = -\frac{2i\hbar}{a^2}\int_{-a/2}^{a/2} dx \sin\left(\frac{4\pi}{a}(x+a/2)\right)$$

$$= -\frac{2i\hbar}{a^2}\int_{-a/2}^{a/2} dx \sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right) = 0$$ ($x \to -x$ yazılırsa ebili haline eşit)

$$\langle x^2\rangle = \frac{2}{a}\int_0^a dx\, \phi_2^*(x)\phi_2(x)x^2 = \frac{2}{a}\int_0^a dx \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)x^2$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^a dx \frac{1-\cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right)}{2}x^2 = \frac{2}{a}\int_0^a dx \frac{x^2}{2} - \frac{1}{a}\int_0^a dx \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right)x^2$$

$$= \frac{x^3}{3a}\Big|_0^a - \frac{1}{a}\left\{x^2\frac{a}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right)\Big|_0^a - \frac{a}{4\pi}\int_0^a dx\, x \sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right)\right\}$$

$$= \frac{a^2}{3} + \frac{1}{a}\cdot\frac{a}{4\pi}\left\{-x\frac{a}{4\pi}\cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right)\Big|_0^a + \frac{a}{4\pi}\int_0^a dx \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right)\right\}$$

$$= \frac{a^2}{3} + \frac{a}{(4\pi)^2}\frac{4\pi}{a}\sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right)\Big|_0^a = \frac{a^2}{3}$$

$\langle p^2\rangle = 2m\langle E\rangle$ olduğu göz önüne alınırsa :

$\langle E\rangle = \langle\phi_2|H|\phi_2\rangle = 2\pi^2\hbar^2/ma^2$

$\langle p_x^2\rangle = 4\pi^2\hbar^2/a^2$ elde edilir.

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{a^2/3 - a^2/4} = a/2$$

$$\Delta p_x = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \frac{2\pi\hbar}{a}$$

$\Delta p_x \Delta x = \frac{2\pi\hbar}{a}\cdot\frac{a}{2} = \pi\hbar \geq \frac{\hbar}{2}$ elde edilir.

SORU: $t=0$'da $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{5}[3|0\rangle + 0|1\rangle + 4|2\rangle]$ ile durumu verilen ve $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ bazında Hamiltonyeni dış çarpım notasyonunda

$$H = 3|0\rangle\langle 0| + 5|1\rangle\langle 2| + 5|2\rangle\langle 1|$$

ile verilen bir sistemde;

a) Enerji ölçüldüğünde hangi değerler hangi olasılıklarla bulunur.

b) Sistemin t anındaki durumunu $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ bazında ve H'ın köşegen olduğu bazda bulunuz.

c) Sistemin ortalama enerjisi zamanla değişir mi?

d) $\{H\}$, CSCO mudur?

Çözüm: a) H, $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ bazında köşegen değildir. Sistemin enerji spektrumunu H'ın özdeğerleri ile, enerji ölçümünün olasılıklarını ise H'ın özdurumları ile $|\psi(0)\rangle$ ın iç çarpımı bulunarak belirlenebilir.

H'ın özdurumları $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ olsun. Bunlar E_1, E_2 ve E_3 özdeğerlerine karşılık gelsinler;

$$\begin{aligned} H|u_1\rangle &= E_1|u_1\rangle \\ H|u_2\rangle &= E_2|u_2\rangle \\ H|u_3\rangle &= E_3|u_3\rangle \end{aligned} \qquad (1)$$

H'ın $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ bazına etkisi ise;

$H|0\rangle = 3|0\rangle \longrightarrow$ Buradan $E_1 = 3$ ve $|u_1\rangle = |0\rangle$ olduğunu görebiliriz.

$H|1\rangle = 5|2\rangle$

$H|2\rangle = 5|1\rangle$

Diğer iki özdeğer ve bunlara karşılık gelen özdurumlar H'ın köşegenleştirilmesi ile bulunabilir. H'ın bir özdurumu $|0\rangle$ olduğundan ve H'ın özdurumları birbirine dik olacağından, kalan iki özdurum $|1\rangle$ ve $|2\rangle$ nin lineer kombinasyonu olacaktır.

$H|u_i\rangle = E_i|u_i\rangle \qquad (i=2,3)$

$H\{|1\rangle\langle 1|u_i\rangle + |2\rangle\langle 2|u_i\rangle\} = E_i|u_i\rangle$

Solden ayrı ayrı $\langle 1|$ ve $\langle 2|$ ile çarpalım;

$$\langle 1|H|1\rangle\langle 1|u_i\rangle + \langle 1|H|2\rangle\langle 2|u_i\rangle = E_i\langle 1|u_i\rangle$$
$$\langle 2|H|1\rangle\langle 1|u_i\rangle + \langle 2|H|2\rangle\langle 2|u_i\rangle = E_i\langle 2|u_i\rangle \qquad (2)$$

(1) denklemlerini kullanarak ve $\langle 1|u_i\rangle \equiv c_1$, $\langle 2|u_i\rangle \equiv c_2$ kısaltmacı yaparak bu denklemler şu hale gelir:

$$\left.\begin{aligned} 0.c_1 + 5c_2 &= E_i c_1 \\ 5c_1 + 0.c_2 &= E_i c_2 \end{aligned}\right\} \quad E_i^2 = 25 \Rightarrow E_i = \pm 5 \text{ elde edilir.} \qquad (3)$$

$E_2 = 5$ ve $E_3 = -5$ özdeğerlerini bulduk. Karşılık gelen özdurumları bulmak için bu değerleri yerine koyarsak;

$E_2 = 5$ için $\quad c_1 = c_2 \Rightarrow |u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle + |2\rangle]$

$E_3 = -5$ için $\quad c_1 = -c_2 \Rightarrow |u_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle - |2\rangle]$

normalize özdurumları bulunmuş olur.

{ Not: Yukarıdaki (2) ve (3) denklemleri matris halinde de yazılabilirdi
Burada yaptığımız da matrisin özdeğerlerini bulmakla tamamen aynı. }

Ne bulmuş olduk?

$H|u_1\rangle = 3|u_1\rangle$ ve $|u_1\rangle = |0\rangle$

$H|u_2\rangle = 5|u_2\rangle$ ve $|u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle + |2\rangle]$ $\qquad$ (4)

$H|u_3\rangle = -5|u_3\rangle$ ve $|u_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle - |2\rangle]$

Buradan enerji ölçümü sonucu $(3, 5, -5)$ değerleri bulma olasılıkları sırasıyla $|\langle u_1|\psi(0)\rangle|^2$, $|\langle u_2|\psi(0)\rangle|^2$ ve $|\langle u_3|\psi(0)\rangle|^2$ ile bulunabilir.

$$\langle u_1|\psi(0)\rangle = \langle 0|\left\{\frac{1}{5}(3|0\rangle + 0|1\rangle + 4|2\rangle\right\} = 3/5$$

$$\langle u_2|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\langle 1| + \langle 2|]\frac{1}{5}[3|0\rangle + 0|1\rangle + 4|2\rangle] = 4/5\sqrt{2} \qquad (5)$$

$$\langle u_3|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\langle 1| - \langle 2|]\frac{1}{5}[3|0\rangle + 0|1\rangle + 4|2\rangle] = -4/5\sqrt{2}$$

Böylece ;

$$P(3) = |3/5|^2 = 9/25, \quad P(5) = |4/5\sqrt{2}|^2 = 8/25 \quad P(-5) = |-4/5\sqrt{2}|^2 = 8/25$$

(5) denklemleri bize ayrıca $|\psi(0)\rangle$'ı $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ bazında nasıl yazabileceğimizi de söylüyor. Buna göre;

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{5}[3|u_1\rangle + 2\sqrt{2}|u_2\rangle - 2\sqrt{2}|u_3\rangle]$$ elde edilir.

b) Sistemin t anındaki durumunu iki ayrı yolla hesaplayalım;

<u>Birinci yol</u>; Sistemin zamanla değişimi Schr. denklemi ile bulunabilir.

$|\psi(t)\rangle = C_1(t)|u_1\rangle + C_2(t)|u_2\rangle + C_3(t)|u_3\rangle$, $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ bazında, veya ;

$|\psi(t)\rangle = C_1'(t)|0\rangle + C_2'(t)|1\rangle + C_3'(t)|2\rangle$ şeklinde $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ bazında açabiliriz.

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

$\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ bazında açarsak;

$$i\hbar\frac{d}{dt}[C_1'(t)|0\rangle + C_2'(t)|1\rangle + C_3'(t)|2\rangle] = H[C_1'(t)|0\rangle + C_2'(t)|1\rangle + C_3'(t)|2\rangle]$$

(1) eşitliklerinden denklemin sağ tarafına H'in etkisini yazarsak;

$$i\hbar\frac{d}{dt}[C_1'(t)|0\rangle + C_2'(t)|1\rangle + C_3'(t)|2\rangle] = 3C_1'(t) + 5C_2'(t)|2\rangle + 5C_3'(t)|1\rangle$$

elde edilir.

Bu denklemi ayrı ayrı $\langle 0|$, $\langle 1|$ ve $\langle 2|$ ile soldan çarparsak aşağıdaki üç tane diferansiyel denklemi elde ederiz.

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_1'(t) = 3c_1'(t)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_2'(t) = 5c_3'(t)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_3'(t) = 5c_2'(t)$$

İlk denklem diğer ikisinden bağımsız ve çözümü;

$$c_1'(t) = Ae^{-3it/\hbar}$$

Diğer iki denklem birbirlerine bağlılar. 2. denklemin zamana göre türevini alalım;

$$i\hbar \frac{d^2}{dt^2} c_2'(t) = 5\frac{d}{dt} c_3'(t)$$

Son denklemdeki $\frac{d}{dt} c_3'(t)$ yi burada yerine yazarsak;

$$i\hbar \frac{d^2}{dt^2} c_2'(t) = 5.\frac{5}{i\hbar} c_2'(t) \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} c_2'(t) = -25 c_2'(t)$$

Buradan $c_2'(t) = Be^{5it/\hbar} + Ce^{-5it/\hbar}$ bulunur.

Bunu ikinci denklemde yerine koyarak $c_3'(t)$ de bulunur.

$$c_3'(t) = \frac{i\hbar}{5} \frac{d}{dt} c_2'(t) = -Be^{5it/\hbar} + Ce^{-5it/\hbar}$$

elde edilir. A, B ve C katsayıları sistemin $t=0$ durumu tarafından belirlenebilir.

$$|\psi(t)\rangle = Ae^{-3it/\hbar}|0\rangle + (Be^{5it/\hbar} + Ce^{-5it/\hbar})|1\rangle + (-Be^{5it/\hbar} + Ce^{-5it/\hbar})|2\rangle$$

$$|\psi(0)\rangle = A|0\rangle + (B+C)|1\rangle + (-B+C)|2\rangle$$

Sistemin başlangıç durumu ile karşılaştırıldığında;

$A = 3/5$ $B = -C$ ve $C = 2/5$ bulunur.

Böylece sistemin t anındaki durumu;

$$|\psi(t)\rangle = \frac{3}{5} e^{-3it/\hbar} |0\rangle + \frac{2}{5}(e^{-5it} - e^{5it})|1\rangle + \frac{2}{5}(e^{5it} + e^{-5it})|2\rangle$$

elde edilir.

(4) eşitlikleri kullanılarak bu durum $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ bazında yazılabilir. (ÖDEV).

Sistemin t anındaki durumunu yine aynı yol ile $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ bazında bulup, daha sonra $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ bazına da çevirebilirdik. Eğer böyle yaparsak;

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t)|u_1\rangle + c_2(t)|u_2\rangle + c_3(t)|u_3\rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

(4) eşitliklerinden;

$$i\hbar \frac{d}{dt}\left[c_1(t)|u_1\rangle + c_2(t)|u_2\rangle + c_3(t)|u_3\rangle\right] = 3c_1(t)|u_1\rangle + 5c_2(t)|u_2\rangle - 5c_3(t)|u_3\rangle$$

Soldan ayrı ayrı $\langle u_1|$, $\langle u_2|$ ve $\langle u_3|$ ile çarparsak;

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_1(t) = 3c_1(t) \quad \Rightarrow c_1(t) = Ae^{-3it/\hbar}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_2(t) = 5c_2(t) \quad \Rightarrow c_2(t) = Be^{-5it/\hbar}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_3(t) = -5c_3(t) \quad \Rightarrow c_3(t) = Ce^{5it/\hbar}$$

A, B, C katsayıları yine sistemin $t=0$ daki durumu ile belirlenir;

$$|\psi(t)\rangle = Ae^{-3it/\hbar}|u_1\rangle + Be^{-5it/\hbar}|u_2\rangle + Ce^{-5it/\hbar}|u_3\rangle$$

$$|\psi(0)\rangle = A|u_1\rangle + B|u_2\rangle + C|u_3\rangle$$

$$= A|0\rangle + \frac{B}{\sqrt{2}}[|1\rangle + |2\rangle] + \frac{C}{\sqrt{2}}[|1\rangle - |2\rangle]$$

Bunu sistemin başlangıç durumu ile karşılaştırarak;

$A = 3/5$ $\quad B = -C$ ve $B = 4/5\sqrt{2}$ bulunur.

Böylece

$$|\psi(t)\rangle = \frac{3}{5} e^{-3it/\hbar} |u_1\rangle + \frac{4}{5\sqrt{2}} e^{-5it/\hbar} |u_2\rangle - \frac{4}{5\sqrt{2}} e^{5it/\hbar} |u_3\rangle$$

elde edilir. Yine (4) eşitliklerinden faydalanarak bu durum $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ bazında yazılabilir. (ÖDEV)

İkinci yol : Sistemin zaman evrimi $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi(0)\rangle$ kullanılarak da bulunabilir. Burada da soruyu iki baz takımı için çözmek mümkündür. $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ bazını kullanırsak $e^{-iHt/\hbar}$ operatörünün bu baza etkisini, $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ bazını kullanırsak $e^{-iHt/\hbar}$ operatörünün bu baza etkisini belirlemeniz gerekir. Her iki bazda da çözelim:

Önce $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ bazında $e^{-iHt/\hbar}$ nin etkisini bulalım:

$e^{-iHt/\hbar}$ yi seriye açacak:

$$e^{-iHt/\hbar} = 1 + \left(\frac{-iH}{\hbar}\right)t + \frac{1}{2!}\left(\frac{-iH}{\hbar}\right)^2 t^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{-iH}{\hbar}\right)^3 t^3 + \cdots\cdots$$

$$= 1 - i\left(\frac{Ht}{\hbar}\right) - \frac{1}{2!}\left(\frac{Ht}{\hbar}\right)^2 + \frac{i}{3!}\left(\frac{Ht}{\hbar}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{Ht}{\hbar}\right)^4 - \cdots\cdots\cdots$$

şeklinde yazılabilir. Bunu $|0\rangle$'a uygularsak:

$$e^{-iHt/\hbar}|0\rangle = |0\rangle - \frac{it}{\hbar}H|0\rangle - \frac{1}{2!}\frac{t^2}{\hbar^2}H^2|0\rangle \cdots\cdots$$

$$= \left[1 - \frac{3it}{\hbar} - \frac{1}{2!}\left(\frac{3t}{\hbar}\right)^2 \cdots\cdots\right]|0\rangle = e^{-3it/\hbar}|0\rangle$$

Şimdi $|1\rangle$'e uygulayalım:

$$e^{-iHt/\hbar}|1\rangle = |1\rangle - \frac{it}{\hbar}H|1\rangle - \frac{1}{2!}\frac{t^2}{\hbar^2}H^2|1\rangle + \frac{i}{3!}\frac{t^3}{\hbar^3}H^3|1\rangle \cdots\cdots$$

$$= |1\rangle - \frac{5it}{\hbar}|2\rangle - \frac{1}{2!}\left(\frac{5t}{\hbar}\right)^2|1\rangle + \frac{i}{3!}\left(\frac{5t}{\hbar}\right)^3|2\rangle \cdots\cdots$$

Görüldüğü gibi çift kuvetler $|1\rangle$, tek kuvetler $|2\rangle$ durumunda sonuçlar veriyor. Bunları gruplarsak;

$$\underbrace{\left[1-\frac{1}{2!}\left(\frac{5t}{\hbar}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{5t}{\hbar}\right)^4-\cdots\right]}_{\cos\left(\frac{5t}{\hbar}\right)}|1\rangle-i\underbrace{\left[\frac{5t}{\hbar}-\frac{1}{3!}\left(\frac{5t}{\hbar}\right)^3+\cdots\right]}_{\sin(5t/\hbar)}|2\rangle$$

$$=\cos\left(\frac{5t}{\hbar}\right)|1\rangle-i\sin\left(\frac{5t}{\hbar}\right)|2\rangle$$

Benzer şekilde $e^{-iHt/\hbar}$ operatörünü $|2\rangle$'ye uygulasak bu defa çift kuvetler $|2\rangle$, tek kuvetler $|1\rangle$ durumu üretecek. Böylece;

$$e^{-iHt/\hbar}|2\rangle=\cos\left(\frac{5t}{\hbar}\right)|2\rangle-i\sin\left(\frac{5t}{\hbar}\right)|1\rangle$$ sonucu elde ederiz.

Buradan

$$|\psi(t)\rangle=e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle=e^{-iHt/\hbar}\left[\frac{1}{5}\left(3|0\rangle+0|1\rangle+4|2\rangle\right)\right]$$

$$=\frac{3}{5}e^{-3it/\hbar}|0\rangle+\frac{4}{5}\cos\left(\frac{5t}{\hbar}\right)|2\rangle-i\sin\left(\frac{5t}{\hbar}\right)|1\rangle$$

Bunu 1. yol ile yaptığımız sonuçla karşılaştıralım; cos ve sin terimlerini üstel fonksiyon olarak yazarsak;

$$|\psi(t)\rangle=\frac{3}{5}e^{-3it/\hbar}|0\rangle+\frac{2}{5}\left(e^{-5it/\hbar}-e^{5it/\hbar}\right)|1\rangle+\frac{2}{5}\left(e^{5it/\hbar}+e^{-5it/\hbar}\right)|2\rangle$$

bulunur ki bu daha önceki sonuçla aynıdır.

$\{|u_1\rangle,|u_2\rangle,|u_3\rangle\}$ bazında çalışmak $e^{-iHt/\hbar}$ nin bu bazlara etkisi göz önüne alındığında çok daha kolaydır. Örneğin $|0\rangle=|u_1\rangle$ dir ve $e^{-iHt/\hbar}|0\rangle=e^{-3it/\hbar}|0\rangle$ olduğunu görmüş olduk. Buradan $e^{-iHt/\hbar}|u_i\rangle=e^{-iE_it/\hbar}|u_i\rangle$ olduğu görülebilir veya seriye açılarak ispatlanabilir. (ÖDEV).

O halde sistemin $t=0$ daki durumunu $|u_i\rangle$ ler cinsinden yazalım;

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{5}\left(3|u_1\rangle + \frac{4}{\sqrt{2}}|u_2\rangle - \frac{4}{\sqrt{2}}|u_3\rangle\right)$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle = \frac{3}{5}e^{-3it/\hbar}|u_1\rangle + \frac{4}{5\sqrt{2}}e^{-5it/\hbar}|u_2\rangle - \frac{4}{5\sqrt{2}}e^{5it/\hbar}|u_3\rangle$$

elde edilir.

c) Sistemin ortalama enerjisi $\langle E\rangle_{t=0} = \langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle$

ve $\langle E\rangle_t = \langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle$ dir.

$$\langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle = \frac{1}{25}\left[3\langle 0| + \langle 1| 0 + 4\langle 2|\right]\left[9|0\rangle + 20|1\rangle\right]$$

$$= 27/25$$

$$\langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle = \left[\frac{3}{5}e^{+3it/\hbar}\langle u_1| + \frac{4}{5\sqrt{2}}e^{5it/\hbar}\langle u_2| - \frac{4}{5\sqrt{2}}e^{-5it/\hbar}\langle u_3|\right]$$

$$\times\left[\frac{9}{5}e^{-3it/\hbar}|u_1\rangle + \frac{4}{\sqrt{2}}e^{-5it/\hbar}|u_2\rangle + \frac{4}{\sqrt{2}}e^{5it/\hbar}|u_3\rangle\right]$$

$$= \frac{27}{25} + \frac{8}{5} - \frac{8}{5} = \frac{27}{25}$$

Sistemin ortalama enerjisi değişmedi. Değişmesi için H'ın zamana bağlı olması gerekir.

SORU : m kütleli yüklü bir parçacık $|\vec{E}|$ şiddetinde elektrik alan altında hareket ediyor. Parçacığın Hamiltonyeninin matris elemanlarını $\hat{X}$ in ve $\hat{P}$ nin bazlarında bulunuz ve her iki bazda Schr. denklemini yazınız. (Soruyu tek boyutta ele alınız)

Çözüm

Parçacığa etki eden $\vec{E}$ nin yaratacağı potansiyel enerji :

$$V(\hat{X}) = -e|\vec{E}|\hat{X}.$$

Böylece Hamiltonyen;

$$H = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{X}) = \frac{\hat{P}^2}{2m} - e|\vec{E}|\hat{X}$$

$\hat{X}$ operatörünün bazı $\{|x'\rangle\}$ kullanılarak matris elemanları :

$\langle x'|H|x''\rangle$ şeklinde bulunmalıdır.

$$\langle x'|H|x''\rangle = \langle x'|\frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{X})|x''\rangle = \langle x'|\frac{P^2}{2m}|x''\rangle + V(x'')\langle x'|x''\rangle$$

Bulmamız gereken $\hat{P}$ operatörünün $|x'\rangle$ bazındaki matris elemanlarıdır.

$$\langle x'|\hat{P}|x''\rangle = \langle x'|\left(\int dp'|p'\rangle\langle p'|\right)\hat{P}|x''\rangle = \int dp' \langle x'|p'\rangle\langle p'|p'|x''\rangle$$

$$= \int dp' p' \langle x'|p'\rangle\langle p'|x''\rangle = \int dp' p' \frac{e^{ip'x'/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \frac{e^{-ip'x''/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int dp' p' e^{ip'(x'-x'')/\hbar} = \frac{1}{(2\pi\hbar)}\left(-i\hbar\frac{d}{dx'}\right)\int dp' e^{ip'(x'-x'')/\hbar}$$

$\frac{1}{2\pi\hbar}\int dp' e^{ip'(x'-x'')/\hbar} = \delta(x'-x'')$ olduğu gözönüne alınırsa;

$\langle x'|P|x''\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\delta(x'-x'')$ elde edilir.

$\hat{P}^2$ operatörünün matris elemanları $\langle x'|\hat{P}|x''\rangle$ bulunduktan sonra kolayca bulunabilir.

$$\langle x'|\hat{P}^2|x''\rangle = \langle x'|PP|x''\rangle = \int dx''' \langle x'|P|x'''\rangle\langle x'''|P|x''\rangle$$

$$= \int dx''' \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\right)\delta(x'-x''')\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x''}\right)\delta(x''-x''')$$

$$= -\hbar^2\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x''}\underbrace{\int dx''' \delta(x'-x''')\delta(x''-x''')}_{\delta(x'-x'')} = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\delta(x'-x'')$$ elde edilir.

Böylece $\hat{X}$'in bazdurumları cinsinden H'ın matris elemanları

$$\langle x'|H|x''\rangle = \frac{1}{2m}\langle x'|P^2|x''\rangle + V(x'')\langle x'|x''\rangle$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx'^2}\delta(x'-x'') + V(x'')\langle x'|x''\rangle$$

$\langle x'|x''\rangle = \delta(x'-x'')$ olduğu göz önüne alınırsa;

$$\langle x'|H|x''\rangle = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx'^2} + V(x'')\right]\delta(x'-x'')$$ elde edilir.

Schr. denklemi $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

$$H|\psi\rangle = \int dx'' H|x''\rangle\langle x''|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

Soldan $\langle x'|$ ile çarpalım:

$$\langle x'|\int dx'' H|x''\rangle\langle x''|\psi\rangle = E\langle x'|\psi\rangle$$

$$\int dx'' \langle x'|H|x''\rangle\langle x''|\psi\rangle = E\langle x'|\psi\rangle$$

$$\int dx'' \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx'^2} + V(x'')\right]\delta(x'-x'')\langle x''|\psi\rangle = E\langle x'|\psi\rangle$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx'^2} + V(x')\right]\langle x'|\psi\rangle = E\langle x'|\psi\rangle$$

$\langle x'|\psi\rangle \equiv \psi(x')$ dersek: Schr. denkleminin konum bazındaki formu:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx'^2} - e|\vec{E}|x'\right)\psi(x') = E\,\psi(x') \quad \text{elde edilir.}$$

Şimdi $\hat{P}$ nin bazında yazalım:

$$\langle p'|H|p''\rangle = \frac{1}{2m}\langle p'|\hat{P}^2|p''\rangle - e|\vec{E}|\langle p'|\hat{X}|p''\rangle$$

$$= \frac{1}{2m}p''^2 \underbrace{\langle p'|p''\rangle}_{\delta(p'-p'')} - e|\vec{E}|\langle p'|\hat{X}|p''\rangle$$

Bulmamız gereken $\langle p'|\hat{X}|p''\rangle$. Bunun için daha önce yaptığımız gibi $\{|x'\rangle\}$ bazı için kapalılık bağıntısını kullanacağız:

$$\langle p'|\hat{X}|p''\rangle = \int dx' \langle p'|x'\rangle\langle x'|\hat{X}|p''\rangle = \int dx'\, x' \langle p'|x'\rangle\langle x'|p''\rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int dx'\, x'\, e^{-ip'x'/\hbar} e^{ip''x'/\hbar} = \frac{1}{2\pi\hbar}\left(\frac{d}{dp'} i\hbar\right)\int dx'\, e^{ix'(p''-p')/\hbar}$$

$= i\hbar\frac{d}{dp'}\delta(p''-p')$ olur. Böylece Hamiltonyenin matris elemanları $\{|p'\rangle\}$ bazında;

$$\langle p'|H|p''\rangle = \left[\frac{p''^2}{2m} - e|\vec{E}|i\hbar\frac{d}{dp'}\right]\delta(p'-p'')$$

Schr. denklemini yazalım: $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

$$\langle p'|H|\psi\rangle = E\langle p'|\psi\rangle$$

$$\int dp''\langle p'|H|p''\rangle\langle p''|\psi\rangle = E\langle p'|\psi\rangle$$

$$\int dp''\left[\frac{p''^2}{2m} - e|\vec{E}|i\hbar\frac{d}{dp'}\right]\delta(p'-p'')\langle p''|\psi\rangle = E\langle p'|\psi\rangle$$

$$\left(\frac{p'^2}{2m} - e|\vec{E}|i\hbar\frac{d}{dp'}\right)\langle p'|\psi\rangle = E\langle p'|\psi\rangle$$

$\langle p'|\psi\rangle \equiv \tilde{\psi}(p')$ dersek: Schr. denklemi;

$$\left(\frac{p'^2}{2m} - e|\vec{E}|\, i\hbar \frac{d}{dp'}\right)\tilde{\psi}(p') = E\,\tilde{\psi}(p')$$ olarak yazılabilir.

Konum bazındaki denklem ikinci mertebe iken, momentum bazında birinci mertebe bir denklem elde ettik. Çünkü potansiyelde $\hat{X}$ operatörü var. Eğer $\hat{X}^2$ olsa idi momentum uzayında da ikinci mertebeden bir denklem elde edilecekti.

* Soruyu daha iyi anlamak için yapmamız gereken ödevler;

1) $\delta(-x) = \delta(x)$

$\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x)$ old göstern.

2) $\tilde{\psi}(p)$ ile $\psi(x)$ arasındaki [Momentum uzayı dalga fonksiyonu ve konum uzayı dalga fonksiyonu]

$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dx\, e^{-ipx/\hbar}\,\psi(x)$ den yola çıkarak

$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\, e^{ipx/\hbar}\,\tilde{\psi}(p)$ olduğunu gösteriniz.

Özetle; $\hat{P}_x$ operatörü $\xrightarrow{\text{konum bazında}}$ $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

$\xrightarrow{\text{momentum bazınd}}$ p_x

$\hat{X}$ operatörü $\xrightarrow{\text{konum bazında}}$ x

$\xrightarrow{\text{momentum bazında}}$ $i\hbar\frac{d}{dp_x}$

SORU :

$$H|u_1\rangle = E|u_1\rangle$$
$$H|u_2\rangle = E|u_2\rangle$$
$$H|u_3\rangle = 2E|u_3\rangle$$
$$H|u_4\rangle = 4E|u_4\rangle$$

ve sistemin durumu aşağıdadır:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle + \frac{1}{\sqrt{12}}|u_4\rangle$$

olarak veriliyor.

a) H'ı dış çarpım notasyonunda yazın.

b) P_E projectör operatörünü $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ altuzayı için yazın.

c) Enerji ölçüldüğünde hangi değer hangi olasılıkla bulunur.

d) Enerji ölçüldüğünde E değeri bulunuyor. Sistemin ölçümden hemen sonra durumu nasıl olur?

Çözüm :

a) $H = E|u_1\rangle\langle u_1| + E|u_2\rangle\langle u_2| + 2E|u_3\rangle\langle u_3| + 4E|u_4\rangle\langle u_4|$

b) $P_E = |u_1\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2|$

c) $$P(E) = \frac{|\langle u_1|\psi\rangle|^2 + |\langle u_2|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{2}{3}$$

$$P(2E) = \frac{|\langle u_3|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{1}{4} \qquad P(4E) = \frac{|\langle u_4|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{1}{12}$$

d) Ölçümden hemen sonra sistemin durumu ;

$$|\chi\rangle = \frac{P_E|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_E|\psi\rangle}} = \frac{\langle u_1|\psi\rangle|u_1\rangle + \langle u_2|\psi\rangle|u_2\rangle}{\sqrt{|\langle\psi|u_1\rangle|^2 + |\langle\psi|u_2\rangle|^2}} = \frac{1}{2}|u_1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|u_2\rangle$$

elde edilir.

SORU: 4-boyutlu bir ortonormal bazda H operatörü

$H|1\rangle = E|1\rangle$
$H|2\rangle = 2E|2\rangle$
$H|3\rangle = 3E|3\rangle$
$H|4\rangle = 4E|4\rangle$ olarak tanımlanıyor.

Sistem: $|\psi\rangle = 3|1\rangle + |2\rangle - |3\rangle + 7|4\rangle$

a) Enerji ölçüldüğünde hangi değerler hangi olasılıklarla bulunur.
b) Sistemin ortalama enerjisi nedir?

Çözüm

$\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$ bazı H'in özdurumlarıdır, özdeğerleri sırasıyla $E, 2E, 3E, 4E$ dir. Sistemin durumu H'in özdurumları cinsinden verilmiş. Bu özdeğerlere karşılık gelen özdurumların $|\psi\rangle$ üzerindeki izdüşümü bu özdeğerlerin genliğini verecektir.

$$P(E) = \frac{|\langle 1|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} \qquad P(3E) = \frac{|\langle 3|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{1}{60}$$

$$P(2E) = \frac{|\langle 2|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{1}{60} \qquad P(4E) = \frac{|\langle 4|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{49}{60}$$

(Toplam olasılık: $P(E) + P(2E) + P(3E) + P(4E) = 1$ olduğuna dikkat edin)

b) Ortalama enerji H'in beklenen değeridir.

$$\langle H\rangle = \sum_i P(E_i)E_i = \frac{3E}{20} + \frac{2E}{60} + \frac{3E}{60} + \frac{4.49E}{60} = \frac{210E}{60} = \frac{7E}{2} \text{ olur.}$$

ÖDEV - 1 (Townsend)

$\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ bazında bir sistemin Hamiltonyeni dışçarpım notasyonunda;

$$H = E_0|1\rangle\langle 1| + A|1\rangle\langle 3| + E_1|2\rangle\langle 2| + A|3\rangle\langle 1| + E_0|3\rangle\langle 3|$$

olarak veriliyor.

a) Sistem $t=0$ anında $|\psi(0)\rangle = |2\rangle$ durumunda ise $|\psi(t)\rangle = ?$

b) Sistem $t=0$ anında $|\psi(0)\rangle = |3\rangle$ durumunda ise $|\psi(t)\rangle = ?$

ÖDEV-2 (Townsend)

$\{|x\rangle, |y\rangle\}$ bazında $H = \begin{pmatrix} 0 & -iE_0 \\ iE_0 & 0 \end{pmatrix}$ olarak veriliyor.

a) H'ın özdeğer ve özdurumları nelerdir?

b) Başlangıçta sistem $|\psi(0)\rangle = |x\rangle$ durumunda ise t süre sonra sistem hangi durumda bulunur.

c) Sistem herhangi bir t anında başlangıç durumuna geri döner mi? Dönerse hangi t anında döner.

ÖDEV-3 (Townsend)

Bir dalga paketi şu şekilde tanımlanıyor:

$$\langle p|\psi\rangle = \begin{cases} 0 & p < -k/2 \\ N & -k/2 < p < k/2 \\ 0 & p > k/2 \end{cases}$$

a) $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ olacak şekilde N'yi belirleyin.

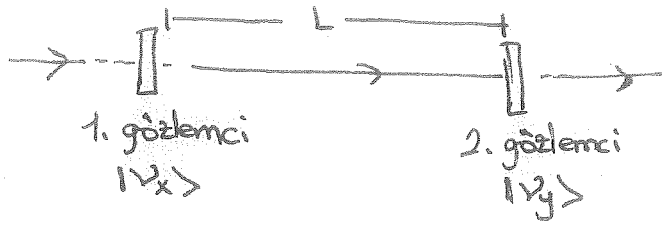
b) $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$'i bulun.

ÖDEV 4: Gözlemlenebilir olan $|\nu_x\rangle$ ve $|\nu_y\rangle$ gibi iki parçacık $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ bazının lineer kombinasyonu olarak yazılabiliyor.

$$|\nu_x\rangle = \cos\theta\,|1\rangle + \sin\theta\,|2\rangle$$
$$|\nu_y\rangle = -\sin\theta\,|1\rangle + \cos\theta\,|2\rangle$$

Sistemin Hamiltonyeni $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ bazında $H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$ şeklinde veriliyor.

$t=0$ anında bir gözlemci $|\nu_x\rangle$ ile temsil edilen parçacığı gözlemliyor. L kadar uzakta bulunan başka bir gözlemci t'inci anda $|\nu_y\rangle$ ile temsil edilen parçacığı gözlemliyor.



Parçacığın bir v hızı ile hareket ettiği varsayılarak (non-relativistic) t'yi E_1, E_2, L cinsinden bulunuz.