1

Problem: 1.

Monoenerjetik elektronlarla yapılan bir çift yarık deneyinde dedektörler iki yarıktan yayınlanan elektron difraksiyon desenini gözlemek için y-eksenine paralel dik bir ekran boyunca yerleştirilirler. Sadece bir yarık açıkken ekranda dedekte edilen elektronların genliği

$$\psi_1(y,t) = A_1 e^{-i(ky-\omega t)}/\sqrt{1+y^2}$$

ve sadece diğeri açıkken genlik

$$\psi_2(y,t) = A_2 e^{-i(ky+\pi y-\omega t)}/\sqrt{1+y^2}$$

olup A_1 ve A_2 bulunması gereken normalizasyon sabitleridir.

(a) İki yarık açıkken ve bir ışık kaynağı hangi yarıktan elektronun geçtiğini belirlemek için kullanılırken

(b) Her iki yarık açıkken ve ışık kaynağı kullanılmadan ekranda dedekte edilen ~~yoğunluğu~~ şiddeti bulunuz.

(a) ve (b) durumları için ekrandaki ~~yoğunluğu~~ şiddeti y'nin fonksiyonu olarak çiziniz.

Çözüm

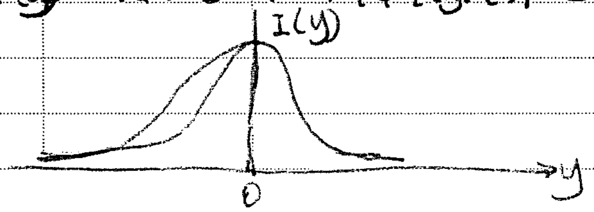
Önce A_1 ve A_2 bulunmalı

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{1+y^2}=\pi \quad \text{ödev!}$$

$$\Rightarrow A_1 = A_2 = \sqrt{1/\pi}$$

(a) Bu durumda ~~yoğunluk~~ şiddet olasılık yoğunluklarının basit toplamıdır

$$I(y) = |\psi_1(y,t)|^2 + |\psi_2(y,t)|^2 = \frac{2}{\pi(1+y^2)}$$



2

(b) Bu durumda hareket bozulmaz ve ~~şiddet~~ ~~ş~~ genliklerin toplamıdır:

$$I(y) = |\Psi_1(y,t) + \Psi_2(y,t)|^2$$

$$= \frac{1}{\pi(1+y^2)} \left| e^{-i(ky-wt)} + e^{-i(ky+\pi y-wt)} \right|^2$$

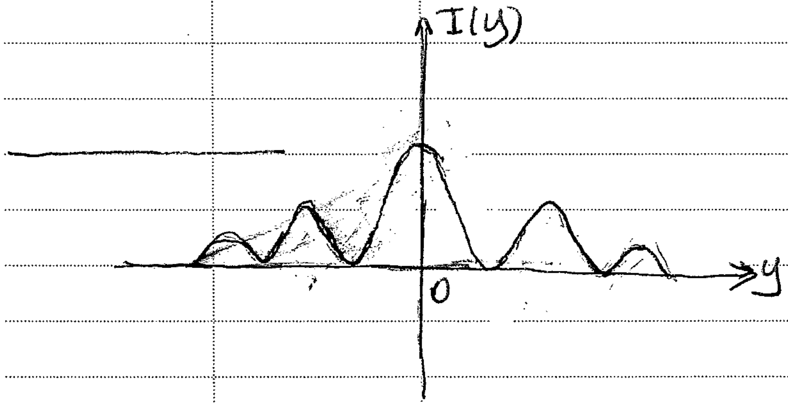
$$= \frac{1}{\pi(1+y^2)} (1+e^{i\pi y})(1+e^{-i\pi y})$$

$$= \frac{1}{\pi(1+y^2)} (2+e^{i\pi y}+e^{-i\pi y})$$

$$= \frac{2}{\pi(1+y^2)} (1+\cos \pi y)$$

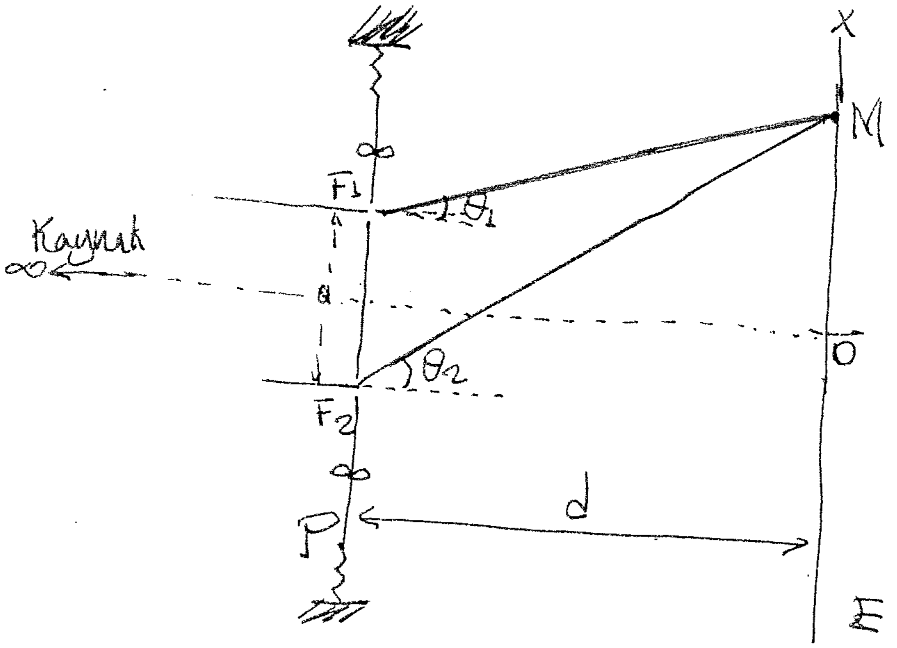
$$= \frac{2}{\pi(1+y^2)} (1+2\cos^2 \tfrac{\pi}{2} y - 1)$$

$$= \frac{4}{\pi(1+y^2)} \cos^2 \tfrac{\pi}{2} y$$



B

2) Aşağıdaki şekilde ~~be~~timlenen çift yarık deneyinde yarıkların bulunduğu levha dikey olarak hareket edebiliyor ve dikey olarak aktarılan momentum ölçülebiliyor. Bir fotonun E ekranı üzerinde M noktasına vurduğunu varsayalım (Basitlik için foton kaynağının P levhasının solunda sonsuz uzakta olduğunu düşünelim) Bu fotonun momentumu P levhasını geçerken değişir. P levhası bu momentum farkını absorbe etsin ve bu farkı ölçebildiğimizi düşünerek F_1 ve F_2 yarıklarının dikey ~~konumlar~~ konumundaki Δx belirsizliğini hesaplayınız.



a : yarıklar arası uzaklık

d : P levhası ile ekran arasındaki uzaklık

θ_1 : F_1M'nin geliş yönü ile yaptığı açı

θ_2 : F_2M'nin geliş yönü ile yaptığı açı

Çözüm 1

P levhasına aktarılan momentum fotonun yoluna yani hangi yarıktan geçtiğine (F_1 / F_2) bağlıdır.

$$F_1 : P_1 = -\frac{h\nu}{c}\sin\theta_1$$

$$F_2 : P_2 = -\frac{h\nu}{c}\sin\theta_2$$

Şimdi fotonların tek tek ekrana ulaşmalarına izin verelim ve yavaş yavaş girişim deseni oluştursunlar. Her bir foton için P'nin momentumu ölçülerek hangi yarıktan geçtiğini ~~belirlenmiş~~ ~~olsun~~ belirlenmiş olsun.

[Hangi yarıktan geçtiklerini bilmemize rağmen girişim deseni oluşuyor: mümkün mü?]

Sadece fotonların kuantum mekaniksel karaktere sahip olduğu varsayıldı oysa ki levha da . . .

Hangi yarıktan fotonun geçtiğini bilmek istersek, P'nin dikey momentumundaki Δp belirsizliği P_1, P_2 momentumları arasındaki farkı ölçmemiz için yeterince küçük olmalı yani $\Delta p \ll |P_1 - P_2|$

Bu durumda levhanın konumunu belirsizlik bağıntısının izin verdiği kadar bilebiliriz: Δx kadar:

$$\Delta x \geqslant \frac{h}{|P_1 - P_2|}$$

θ_1 ve θ_2 çok küçük olsunlar yani $\frac{d}{a} \gg 1$ olsun

$$\Rightarrow \sin\theta_1 = \theta_1 - \frac{1}{3!}\theta_1^3 + \frac{1}{5!}\theta_1^5 \ldots \simeq \theta_1 \simeq \frac{x - a/2}{d}$$

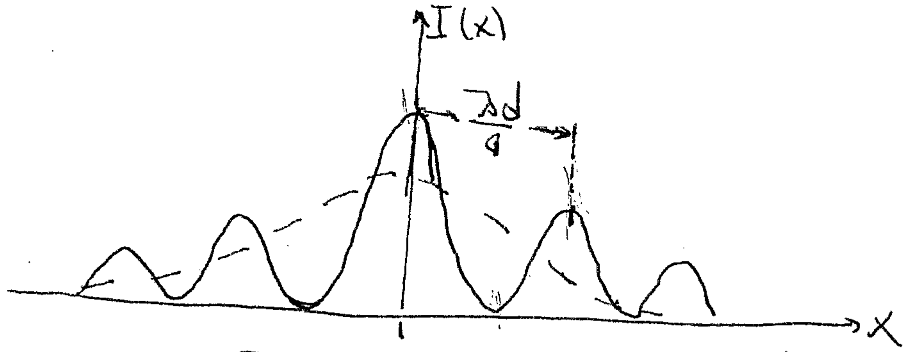
$$\sin\theta_2 \approx \theta_2 \simeq \frac{x + a/2}{d}$$

bulunur.

$$\Rightarrow |P_1 - P_2| = \left| -\frac{h\nu}{c}\frac{x - a/2}{d} + \frac{h\nu}{c}\frac{x + a/2}{d} \right| = \frac{ha}{\lambda d} \; ; \; \underbrace{\lambda}_{\text{ışığın dalga boyu}} = \frac{c}{\nu}$$

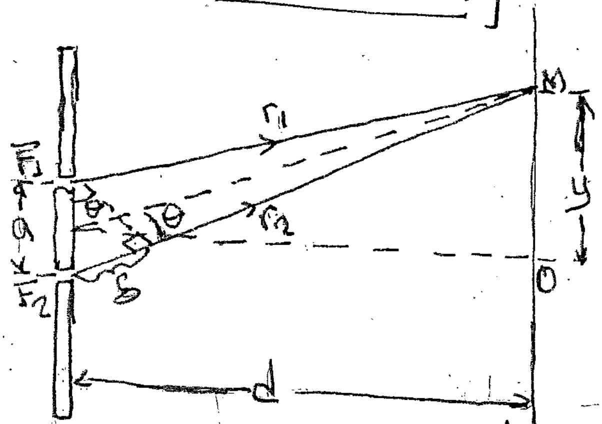
$$\Rightarrow \Delta x \gtrsim \frac{\lambda d}{a}$$

bulunur. $\frac{\lambda d}{a}$ ekran üzerinde bulmayı beklediğimiz saçak aralığıdır. Eğer F_1 ve F_2 yarıklarının dikey konumu saçak aralığından daha büyük bir belirsizlikle belirlenirse girişim deseni gözlenmez.



Şekil 2.

Hatırlatma



$\delta = a\sin\theta = m\lambda$ ise M noktasına gelen dalgalar eş fazlı olur M noktasında yapıcı girişim oluşur

$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ekranda aydınlık saçak oluşur

$\delta = a\sin\theta = (m+\frac{1}{2})$ ise dalgalar zıt fazda olur yıkıcı girişim oluşur

ekranda karanlık saçak oluşur

Aydınlık ve karanlık saçaklar arasındaki uzaklığı bulalım $d \gg a$ ve $a \gg \lambda$ alalım (bu pratik olarak doğrudur Fizik III Lab. deneyine bakın) Bu koşullarda θ çok küçüktür ve

$\sin\theta \simeq \frac{y}{d}$ yazılabilir

Aydınlık saçak için

$$a\sin\theta \simeq a\frac{y_a}{d} = m\lambda$$

$$y_a = \frac{md\lambda}{a}$$

Karanlık saçak için

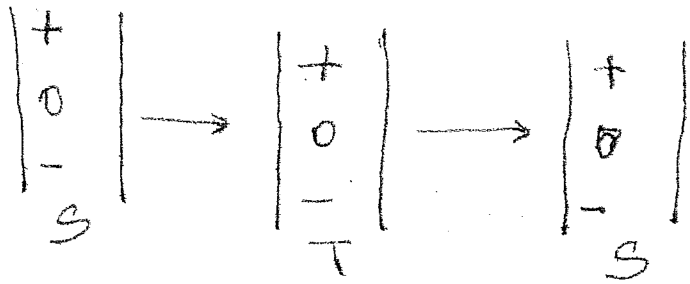
$$a\sin\theta = a\frac{y_k}{d} = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$$

$$y_k = \frac{(m+1/2)d\lambda}{a}$$

$$\Rightarrow\ y_k - y_a = \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{a}$$ karanlık ve aydınlık saçak arasındaki ~~[illegible]~~ aralıktır.

Şimdi yukarıdaki deneye tekrar dönecek olursak, eğer Δx belirsizli ~~[illegible]~~ saçaklar arasındaki uzaklıktan büyük ise ekranda bir girişim deseni görülmez. Şiddet dağılımı (ışığın) şekil 2'de kesikli çizgi ile gösterilen Gausian dağılım olacaktır.

3 Bir parçacık demetini spinin z bileşenine göre ayıran fakat demeti uzaysal olarak bir araya getiren SG aparatları arka arkaya sıralanıyorlar ve spini 1 olan bir parçacık demeti bu sete gönderiliyor. İlk ve son aparat aynı oryantasyonda sıralanmışlar ve ikinci (ortadaki) bunlara göre keyfi bir açı ile konulmuştur (üç aparat aynı doğru üzerindedir).



(a) Eğer T'nin bir kanalı açık ise ~~S~~ son S sisteminin üç durumunun her birinde bulunan demetin oranı giriş durumuna bağlı mıdır, yani +S, 0S, −S 'deki demet oranına bağlı mıdır? Neden?

(b) Eğer T'nin iki kanalı açık ise ne olur?

(c) Eğer T'nin üç kanalı açık ise ne olur?

3(a) T'nin bir kanalı açık iken ikinci S'den geçen parçacıklar 1. S'nin hangi kanalından geldiğinin bilgisine sahip değiller; örneğin T'nin $|+T\rangle$ kanalı açıksa 2. S'ye giden parçacıkların hepsi $|+T\rangle$ durumundadır ve 2. S'den çıkan parçacıkların genlikleri

$|\langle +S|+T\rangle|^2$ ile orantılı olacaklardır ve ilk S
$|\langle -S|+T\rangle|^2$ aparatının durumlarından bağımsızdırlar
$|\langle 0T|+T\rangle|^2$

(b) T'nin 2 kanalı açık olsun; örneğin $|+T\rangle$, $|0T\rangle$ kanalları açık olsun. Bu durumda yine son S aparatına gelen parçacıklar daha önce ilk S'nin hangi durumunda olduklarını bilmeyecekler. Son S'ye gelen demet $|+T\rangle$ ve $|0T\rangle$ durumlarından gelecekler ve geçme genlikleri (son S'den)

$|\langle +S|+T\rangle|^2$
$|\langle +S|0T\rangle|^2$ genlikleri ile orantılı olacaklardır.
$|\langle 0S|+T\rangle|^2$
$|\langle 0S|0T\rangle|^2$.
$|\langle -S|+T\rangle|^2$
$|\langle -S|0T\rangle|^2$

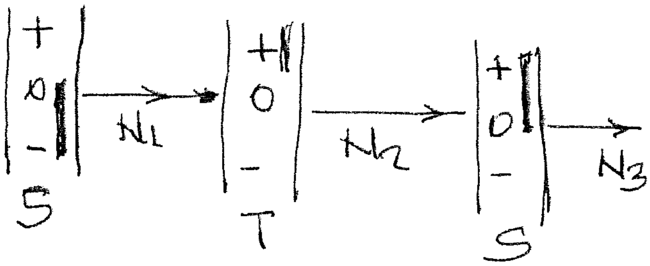
(c) T aparatının tüm kanalları açıksa, son S aparatından çıkan demet ilk S aparatından çıkan demet ile aynıdır. Parçacıklar T aparatın~~daki~~ ~~durumları hatırlamazlar~~ yok sayarlar, $1=\sum_i |i\rangle\langle i|$ Genlikler

$|\langle +S|+S\rangle|^2$

$|\langle 0S|0S\rangle|^2$ ile orantılıdır ve ilk S'den

$|\langle -S|-S\rangle|^2$ gelen demet son S'den çıkan demet ile ~~aynı genliğe~~ aynıdır.

(4) Spini bir olan parçacıklar için bir SG deneyi aşağıdaki gibi kurulmuştur:



Üç aparat düz bir doğru boyunca sıralanmıştır, fakat T aparatı bu doğru etrafında ~~90° dönderilmiştir~~ S aparatlarına göre 90° dönderilmiştir. Spin 1 parçacıklardan oluşan bir demet soldan deney setine giriyor. Birinci S aparatını geçen parçacık demeti saniyede N_1 parçacık ~~yoğun~~ şiddetine sahiptir.

(a) T aparatını geçen demetin N_2 parçacık yoğunluğu (şiddeti) nedir?

(b) Son S aparatından ayrılan demetin N_3 parçacık şiddeti nedir?

(c) Eğer T aparatından tüm engeller kaldırılırsa N_2 ve N_3 ne olur?

5.3) Soruyu çözmek için gerekli bilgi

Geçme genlikleri

(a) 1. SG aparatı ve 2. SG aparatı aynı y-ekseni üzerinde ve 2. SG aparatı 1. aparata göre α açısı kadar döndürülmüş ise

$$[x' = x\cos\alpha - z\sin\alpha \,,\ y' = y \,,\ z' = z\cos\alpha + x\sin\alpha]$$

$$\langle +T | +S \rangle = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} + \\ 0 \\ - \end{vmatrix}_S \longrightarrow \begin{vmatrix} + \\ 0 \\ - \end{vmatrix}_T$$

$$\langle 0T | +S \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha$$

$$\langle -T | +S \rangle = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$$

$$\langle +T | 0S \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha$$

$$\langle 0T | 0S \rangle = \cos\alpha$$

$$\langle -T | 0S \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha$$

$$\langle +T | -S \rangle = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$$

$$\cancel{\langle 0T | 0S \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha} \quad \langle 0T | -S \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha$$

$$\langle -T | -S \rangle = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$$

(b) T ve S aynı z ekseni üzerinde ve T z etrafında β kadar döndürülsün $[z' = z,\ x' = x\cos\beta + y\sin\beta$

$y' = y\cos\beta - x\sin\beta$

$$\langle +T | +S \rangle = e^{+i\beta}$$

$$\langle 0T | 0S \rangle = 1$$

$$\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ - \end{vmatrix}_S \longrightarrow \begin{vmatrix} + \\ 0 \\ - \end{vmatrix}_T$$

$$\langle -T | -S \rangle = e^{-i\beta}$$

Diğer durumlar sıfıra eşittir

(a) Soruyu (a) durumuna göre çözeceğiz.

$$\langle 0T|+S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\Big|_{\alpha=90} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$|+S\rangle$'den gelip $\langle 0T|$'den geçenlerin olasılığı

$$|\langle 0T|+S\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$\langle 0T|$'den geçenlerin sayısı $= \frac{1}{2}N_1$

$|+S\rangle$'den gelip $\langle -T|$'den geçenler:

$$\langle -T|+S\rangle = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)\Big|_{\alpha=90} = \frac{1}{2}$$

$$|\langle -T|+S\rangle|^2 = 1/4$$

$\Leftarrow$ $\langle -T|$'den geçenlerin sayısı $= |\langle -T|+S\rangle|^2 N_1 = \frac{1}{4}N_1$

$N_2 = \langle 0T|$'den geçenler $+ \langle -T|$'den geçenler

$= \frac{3}{4}N_1$

(b) $|0T\rangle$'den gelip $\langle -S|$'den geçenler

$$|\langle 0T|+S\rangle\langle -S|0T\rangle|^2_{\alpha=90} = |\langle 0T|+S|^2_{\alpha=90}|\langle -S|0T\rangle|^2_{\alpha=90}$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 90\right)^2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 90\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$|0T\rangle$'den gelip $\langle -S|$'den geçenler $= N_1\frac{1}{4}$

Bunu biraz farklı yapalım (yukarıda uzattım)

$\langle -T|$'ye gelenleri biliyoruz : $\frac{1}{4}N_1$

Bu durumda $|-T\rangle$'den çıkıp $\langle -S|$'den geçenleri bulalım

$$|\langle -S|-T\rangle|^2_{\alpha=90} = \left(\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)\right)^2_{\alpha=90} = \frac{1}{4}$$

$|-T\rangle$'den çıkıp $\langle -S|$'den geçenlerin sayısı $= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}N_1$

$= \frac{1}{16}N_1$

$$N_3 = \frac{1}{4}N_1 + \frac{1}{16}N_1 = \frac{5N_1}{16}$$

(C) T aparatında tüm engeller kaldırılırsa, geçen parçacıkların polaritesi ve sayısı değişmez. Gelen parçacıklar bu durumda T aparatını algılamazlar ve $N_2 = N_1$ ve de

$\langle +S|-S\rangle = 0$ olduğundan

$N_3 = 0$ olur

$$1 = \sum_{i=+T,\,0T,\,-T} |i\rangle\langle i|$$