SORU 1) Aralarında $U = \alpha x_1 x_2$ gibi bir etkileşme potansiyeli bulunan iki m kütleli lineer harmonik osilatörden oluşan bir sistemin enerji spektrumunu bulunuz.

ÇÖZÜM 1) Sistemin Hamiltonyeni iki parçacık için H.O. Hamiltonyenleri ve etkileşme potansiyelinden oluşur.

$$H = \underbrace{\frac{P_1^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X_1^2}_{H_1} + \underbrace{\frac{P_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X_2^2}_{H_2} + \underbrace{\alpha X_1 X_2}_{H_e}$$

H_1 ve H_2'nin ortak özdurumları bulunabilir, çünkü $[H_1, H_2] = 0$ dır. Ancak He dahil olduğunda $[H_1, H_e] \neq 0$, $[H_2, H_e] \neq 0$, her üçünün de köşegen olduğu bir baz bulamayız. Koordinat dönüşümü yaparak bu sistemi iki tane etkileşmeyen H.O. haline getirmek mümkündür.

$$X_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2) \qquad\qquad X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_+ + X_-)$$

$$\Longrightarrow$$

$$X_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2) \qquad\qquad X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_+ - X_-)$$

şeklinde yeni koordinatlar tanımlayalım. Öncelikle dönüşümün üniter olduğunu yani boyları koruduğunu görelim.

$$\begin{pmatrix} X_+ \\ X_- \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{U}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazarak dönüşüm matrisi için $UU^{+} = 1$ olduğu gösterilebilir.

$$UU^{+} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dönüşüm üniter olduğundan boyları koruyacaktır. Dolayısıyla bu dönüşüm altında $P_1^2 + P_2^2 = P_+^2 + P_-^2$ olarak yazılabilir. Benzer şekilde $X_1^2 + X_2^2 = X_+^2 + X_-^2$ olduğu görülebilir. Etkileşme terimi ise;

$$X_1 X_2 = \frac{1}{2}(X_+ + X_-)(X_+ - X_-) = \frac{1}{2}X_+^2 - \frac{1}{2}X_-^2 \text{ olur.}$$

Böylece $H = \frac{P_+^2}{2m} + \frac{P_-^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X_+^2 + \frac{1}{2}\alpha X_+^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 X_-^2 - \frac{1}{2}\alpha X_-^2$ olur.

Bu düzenlenirse :

$$H = \frac{P_+^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega^2+\alpha/m)X_+^2 + \frac{P_-^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega^2-\alpha/m)X_-^2 = H_+ + H_-$$

şekline gelir. Burada m kütleli iki etkileşmeyen H.O. olduğunu görüyoruz. Bir tanesi $\omega_+ = (\omega^2+\alpha/m)^{1/2}$, diğeri $\omega_- = (\omega^2-\alpha/m)^{1/2}$ frekansları ile salınım yapıyorlar. $[H_+, H_-]=0$ olduğundan ortak özdurumlar yazabiliriz ; $|n_+, n_-\rangle$ gibi. n_+ 1. osilatörün seviyesi, n_- ise ikinci osilatörün seviyesini gösteriyor. Enerji özdeğerleri ;

$$E_{n_+,n_-} = \left(n_+ + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_+ + \left(n_- + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_- \quad \text{olur.}$$

ÖDEV: 3 boyutta eşyönlü olmayan, yani x, y, z doğrultularındaki salınım frekansları farklı olan bir harmonik osilatörün enerji spektrumunu bulunuz. Her yöndeki salınım frekansları eşit olduğu durumda ilk üç enerji seviyesinin dejenerasyonunu inceleyiniz.

ÖDEV: X_1 ve X_2 konumlarında bulunan, P_1 ve P_2 momentumlarına sahip m kütleli iki parçacık $V = \frac{1}{2}m\omega^2X^2$ potansiyelinde hareket ediyorlar. Parçacıkların etkileşmediklerini varsayalım.

a) İki parçacıklı bu sistem için $H = H_1 + H_2$ şeklinde bir Hamiltonyen yazın. H_1 ve H_2 sırasıyla sadece 1. ve 2. parçacığın durum uzayına etki etsin. Sistemin enerjilerini ve dejenerasyonları bulunuz, ve bu enerjilere karşılık gelen durumları yazınız.

b) H C.S.C.O oluşturur mu? $\{H_1, H_2\}$ oluşturur mu? H_1 ve H_2'nin ortak özdurumların $|n_1, n_2\rangle$ ile gösterelim. $|n_1, n_2\rangle$ durumları için diklik ve tamlık bağıntılarını yazın.

c) $t=0$'da $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}(|0,0\rangle + |1,0\rangle + |0,1\rangle + |1,1\rangle)$ ile verilen bir sistem ele alın. i) Toplam enerji ii) 1. parçacığın enerjisi iii) 1. parçacığın konumu ölçüldüğünde hangi değerler hangi olasılıkla bulunur.

SORU 2) L^2 ve L_z operatörünün $\hbar^2 l(l+1)$ ve $m\hbar$ özdeğerli bir $|l,m\rangle$ durumundaki parçacık için, $\langle L_x\rangle$, $\langle L_y\rangle$, $\langle L_x^2\rangle$, $\langle L_y^2\rangle$ beklenen değerlerini hesaplayın.

ÇÖZÜM 2) $\langle l,m|L_x|l,m\rangle = \frac{1}{2}\langle l,m|L_+ + L_-|l,m\rangle$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle l,m|L_+|l,m\rangle + \langle l,m|L_-|l,m\rangle\right) = 0$$

Benzer şekilde $\langle L_y\rangle = \frac{1}{2i}\langle l,m|(L_+ - L_-)|l,m\rangle = 0$

$$\langle L_x^2\rangle = \frac{1}{4}\langle l,m|(L_+ + L_-)(L_+ + L_-)|l,m\rangle =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\langle L_+L_+\rangle + \langle L_-L_-\rangle + \langle L_+L_-\rangle + \langle L_-L_+\rangle\right)$$

İlk iki terimin sıfır olduğu kolayca görülebilir. Çünkü $\langle l,m|l,m\pm 2\rangle = 0$.

$$\langle L_+L_-\rangle = \langle l,m|L_+\left(L_-|l,m\rangle\right) = \langle l,m|L_+\left(\hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\,|l,m-1\rangle\right)$$

$$= \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\,\langle l,m|L_+|l,m-1\rangle$$

$$= \hbar^2\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\sqrt{l(l+1)-(m-1)m}\,\langle l,m|l,m\rangle = \hbar^2[l(l+1)-m(m-1)]$$

$\langle L_-L_+\rangle$ aynı yöntemle hesaplanabilir. Başka bir yöntem de şudur:

$$[L_+,L_-] = [L_x+iL_y, L_x-iL_y] = -2i[L_x,L_y] = 2\hbar L_z$$

Böylece $L_-L_+ = L_+L_- - 2\hbar L_z$ yazılabilir. Bunu kullanarak:

$$\langle L_-L_+\rangle = \langle L_+L_- - 2\hbar L_z\rangle = \langle L_+L_-\rangle - 2\hbar\langle L_z\rangle = \hbar^2(l(l+1)-m(m-1)) - 2\hbar^2 m$$

$= \hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m(m+1)$ elde edilir.

Böylece $\langle L_x^2\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle L_+L_-\rangle + \langle L_-L_+\rangle\right) = \frac{\hbar^2}{2}\left(l(l+1)-m^2\right)$ elde edilir.

Benzer şekilde $\langle L_y^2\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(l(l+1)-m^2\right)$ bulunur.

SORU 3) Bir sistem $\psi(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta\cos\phi$ durumunda bulunuyor.

a) L_z ölçüldüğünde hangi değerler hangi olasılıklar ile bulunur.

b) Bu durum için $\langle L_x\rangle = ?$

Çözüm 3) $\psi(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta\left(\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}\right)$ olarak yazılabilir.

Bu şekilde yazıldığında sistemin Y_l^m küresel harmoniklerinin lineer kombinasyonu olduğu kolayca görülebilir.

$Y_2^{\pm 1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta e^{\pm i\phi}$ olduğundan, sistem $\psi(\theta,\phi) = \frac{1}{2}(-Y_2^1 + Y_2^{-1})$ olur.

Ket notasyonunda; $|l,m\rangle$

$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(-|2,1\rangle + |2,-1\rangle)$ olarak yazılabilir.

Sistemi normalize edersek

$N^2\langle\psi|\psi\rangle = \frac{N^2}{4}(1+1) = N^2/2 = 1 \Rightarrow N = \sqrt{2}$

O halde

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|2,1\rangle + |2,-1\rangle\right)$ olur.

a) L_z ölçülürse $\frac{1}{2}$ olasılıklarla ± 1 bulunur.

b) $\langle L_x\rangle = \frac{1}{2}\left(-\langle 2,1| + \langle 2,-1|\right) \; L_x \; \left(-|2,1\rangle + |2,-1\rangle\right)$

Aynı $|l,m\rangle$ durumları arasında $\langle L_x\rangle = 0$ olacağını önceki soruda görmüştük. $\langle 2,1|L_x|2,-1\rangle = 0$ olduğu kolayca görülebilir. L_x, L_+ ve L_- nin toplamı olarak yazılabileceğinden $L_x|2,-1\rangle$ bize $|2,0\rangle$ ve $|2,-2\rangle$ durumları verecek ki bunların $\langle 2,1|$ ile çarpımı sıfırdır.

Böylece $\langle L_x\rangle = 0$ bulunur.

SORU 4) $\vec{B} = B_0\hat{z}$ manyetik alanındaki bir katı döner için Hamiltonyen;

$H = \frac{\hat{L}^2}{2I} + \omega_0\hat{L}_z$ olarak verilmektedir. (ω_0 sabit)

Sistem $t=0$ da $\langle\theta,\phi|\psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\theta\sin\phi$

durumunda ise t anında sistemin durumu ne dir. t anında $\langle L_x\rangle = ?$.

Çözüm 4)

$$\langle \theta, \phi | \psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta \left(\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2}\right) = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(Y_1^1 + Y_1^{-1}\right)$$ olarak yazılabilir.

Böylece $|\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle + |1,-1\rangle\right)$ olur.

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle$$

$$H|1,1\rangle = \frac{1}{2I}L^2|1,1\rangle + \omega_0 L_z|1,1\rangle = \left(\frac{\hbar^2 1(1+1)}{2I} + \omega_0\hbar\right)|1,1\rangle = E_+|1,1\rangle$$

$$H|1,-1\rangle = \left(\frac{\hbar^2 1(1+1)}{2I} - \omega_0\hbar\right)|1,-1\rangle = E_-|1,-1\rangle$$ diyelim.

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_+t/\hbar}|1,1\rangle + e^{-iE_-t/\hbar}|1,-1\rangle\right)$$ olur.

$$= \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\hbar t/I}\left(e^{-i\omega_0 t}|1,1\rangle + e^{i\omega_0 t}|1,-1\rangle\right)$$

$$\langle L_x\rangle = \frac{1}{2}\left(e^{+i\omega_0 t}\langle 1,1| + e^{-i\omega_0 t}\langle 1,-1|\right) L_x \left(e^{-i\omega_0 t}|1,1\rangle + e^{i\omega_0 t}|1,-1\rangle\right) = 0$$

bulunur.