

①

SORULAR

1) m_1 ve m_2 kütlelerine, ve aynı ω frekansına sahip iki harmonik salınıcı $\frac{1}{2}K(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2$ etkileşimi ile kuple olmuşlardır (çiftlenmişlerdir). Bu sistemin enerji özdeğerlerini harmonik osilatörün $|Q_n\rangle = |n\rangle$ bazında bulun.

2) m kütleli ve ω aresel frekansına sahip bir harmonik salınıcıyı ele alalım. $|Q_n\rangle$ durumları $(n+1/2)\hbar\omega$ enerjilerine sahip duragan durumlar olmak üzere, $t=0$ zamanında bu salınıcının durumları

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_n c_n |Q_n\rangle$$

ile verilsin.

(a) Herhangi bir $t > 0$ zamanında salınıcının enerjisi ölçüldüğünde $2\hbar\omega$ değerinden daha büyük bir enerji değeri bulma olasılığı nedir? Bu olasılık sıfıra eşit ise hangi c_n katsayıları sıfırdan farklıdır?

(b) Sadece c_0 ve c_1 katsayıları sıfırdan farklı olsun. $|\Psi(0)\rangle$ için normalizasyon koşulunu ve enerjinin ortalama değeri, $\langle H \rangle$ 'yi yazın. $\langle H \rangle = \hbar\omega$ olarak $|c_0|^2$ ve $|c_1|^2$ 'yi hesaplayınız.

(c) $|\Psi(0)\rangle$ (b) seçeneğinde normalize edildi. Burada c_0 reel ve pozitif ve $c_1 = |c_1|e^{i\theta}$ olsun. $\langle H \rangle = \hbar\omega$ ve $\langle X \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ olarak verilsin. Bunu hesaplayınız.

2

SORULAR

(d) $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_0\rangle + \frac{e^{i\theta_1}}{\sqrt{2}}|u_1\rangle$ olarak yutarıda elde edildi. t zamanında $\langle X \rangle(t)$, konumun ortalama değerini hesaplayınız.

(3) m kütleli ve q yüküne sahip bir parçacık bir boyutlu bir harmonik salının potansiyeli etkisinde hareket etmektedir. Parçacığın sabit bir $\mathcal{E}$, elektrik alanı içine konulduğunu varsayalım.

(a) Bu parçacığın Hamiltonyenini yazın ve enerji öz değerlerini hesaplayınız.

(b) Elektrik alan $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ şeklinde ω_0 aresal frekansı ile salınım yaptığını ~~ve~~ düşünelim. Bu durum için parçacığın konumunun, momentumunun ve Hamiltonyeninin beklenen değerlerinin zamanla değişimini bulunuz. ($\frac{d}{dt}\langle \hat{X} \rangle = ?$, $\frac{d}{dt}\langle \hat{P} \rangle = ?$ ve $\frac{d}{dt}\langle \hat{H} \rangle = ?$)

(c) (b) seçeneğinden yararlanarak konumun beklenen değerini (herhangi bir t zamanı için) bulunuz.

(4) $\psi(x, 0) = A e^{-x^2/a^2}$, $t=0$ 'da bir serbest parçacığın Schrödinger denkleminin çözümüdür.

(a) $t=0$ 'da momentum ~~uzayında~~ klasik genliğini bulunuz.

(c) $\psi(x, t)$ 'yi bulunuz.

(3)

5) Bir harmonik osilatör $t=0$ anında

$$|\psi_p(0)\rangle = e^{ip/\hbar}|0\rangle$$

durumundadır. Burada p verilen bir uzunluk ve $|0\rangle$ harmonik osilatörün temel durumudur.

(a) $e^{ip/\hbar}$ operatörünün iteleme özelliğinden, yani

$$e^{ip/\hbar} x e^{-ip/\hbar} = x + l$$

ifadesinden yararlanarak $\langle n | e^{ip/\hbar} | 0 \rangle$ matris elemanlarını hesaplayınız.

(b) Herhangi bir $t > 0$ anında sistemin dalga fonksiyonunu hesaplayınız ve bu fonksiyonun l ve $-l$ arasında salınan bir noktada merkezlenen bir Gaussian dalga paketi ne karşılık geldiğini gösteriniz.

(c) Yukarıdaki dalga paketi için $(\Delta x)^2$ ve $(\Delta p)^2$ belirsizliklerini hesaplayınız ve tüm zamanlar için bir minimum dağılıma sahip olduğunu gösteriniz.

①

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \frac{1}{2} K (\hat{X}_1 - \hat{X}_2)^2$$

$$= \frac{1}{2m_1} \hat{p}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \omega^2 \hat{X}_1^2 + \frac{1}{2m_2} \hat{p}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 \hat{X}_2^2 + \frac{1}{2} K (\hat{X}_1 - \hat{X}_2)^2$$

Bu problemi kütle merkezi ve göreceli koordinatlar cinsinden çözelim

Toplam momentum: $\hat{P} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2$

Göreceli momentum: $\hat{p} = \frac{m_1 \hat{p}_1 + m_2 \hat{p}_2}{M}$, $M = m_1 + m_2$

Kütle merkezi koordinatı: $\hat{X} = \frac{m_1 \hat{X}_1 + m_2 \hat{X}_2}{M}$

Göreceli koordinatlar: $\hat{x} = \hat{X}_1 - \hat{X}_2$

İndirgenmiş kütle: $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$

Yeni koordinatlar cinsinden $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$, $\hat{X}_1$ ve $\hat{X}_2$ operatörlerini yazalım*

$$\hat{p}_1 = \frac{m_1}{M} \hat{P} + \hat{p}$$

$$\hat{p}_2 = \frac{m_2}{M} \hat{P} - \hat{p}$$

$$\hat{X}_1 = \frac{m_2}{M} \hat{x} + \hat{X}$$

$$\hat{X}_2 = -\frac{m_1}{M} \hat{x} + \hat{X}$$

Hamiltoniyeni yeniden yazalım

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{1}{2m_1} \left(\frac{m_1}{M} \hat{P} + \hat{p} \right)^2 + \frac{1}{2} m_1 \omega^2 \left(\frac{m_2}{M} \hat{x} + \hat{X} \right)^2 + \frac{1}{2m_2} \left(\frac{m_2}{M} \hat{P} - \hat{p} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 \left(-\frac{m_1}{M} \hat{x} + \hat{X} \right)^2 + \frac{1}{2} K \hat{x}^2 \end{aligned}$$

②

Burada $\left. \begin{aligned} [\hat{X}, \hat{P}] &= i\hbar, [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \\ [\hat{X}, \hat{p}] &= [\hat{x}, \hat{P}] = 0 \end{aligned} \right\} \text{Ödev}$

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{1}{2m_1} \left(\frac{m_1^2}{M^2} \hat{P}^2 + \hat{p}^2 + \frac{m_1}{M} \hat{P} \hat{p} + \frac{m_1}{M} \hat{p} \hat{P} \right) + \frac{1}{2} m_1 \omega^2 \left(\frac{m_1^2}{M^2} \hat{x}^2 + \hat{x}^2 + \frac{m_2}{M} \hat{x} \hat{X} + \frac{m_2}{M} \hat{X} \hat{x} \right) + \frac{1}{2m_2} \left(\frac{m_2^2}{M^2} \hat{P}^2 + \hat{p}^2 - \frac{m_2}{M} \hat{P} \hat{p} - \frac{m_2}{M} \hat{p} \hat{P} \right) + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 \left(\frac{m_2^2}{M^2} \hat{x}^2 - \frac{m_2}{M} \hat{x} \hat{X} - \frac{m_2}{M} \hat{X} \hat{x} + \hat{x}^2 \right) + \frac{1}{2} K \hat{x}^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1}{M^2} \hat{P}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2}{M^2} \hat{P}^2 + \frac{1}{2} m_1 \omega^2 \hat{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 \hat{x}^2$$

$$+ \frac{1}{2m_1} \hat{p}^2 + \frac{1}{2m_2} \hat{p}^2 + \frac{\omega^2 m_1 m_2}{2 M^2} (m_1 + m_2) \hat{x}^2 + \frac{1}{2} K \hat{x}^2$$

$$= \frac{1}{2M} \hat{P}^2 + \frac{\omega^2}{2} M \hat{x}^2 + \frac{1}{2\mu} \hat{p}^2 + \frac{\omega^2}{2} \mu \hat{x}^2 + \frac{1}{2} K \hat{x}^2$$

$$= \frac{1}{2M} \hat{P}^2 + \frac{\omega^2}{2} M \hat{x}^2 + \frac{1}{2\mu} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \mu \left(\omega^2 + \frac{K}{\mu} \right) \hat{x}^2$$

$$= \hat{H}_{KM} + \hat{H}_g$$

$$H_{KM} = \frac{1}{2M} \hat{P}^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 \hat{x}^2$$

$$\hat{H}_g = \frac{1}{2\mu} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \mu \left(\omega^2 + \frac{K}{\mu} \right) \hat{x}^2$$

$$\boxed{\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$$

③

$$\Omega^2 = \omega^2 + k/\mu$$

$$H_{\text{g}} = \frac{1}{2\mu} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \mu \Omega^2 \hat{x}^2$$

Böylece iki eşitlenimli sarkacı iki birbirinden bağımsız harmonik salıncığa indirgeedik. Bu iki bağımsız harmonik salıncının kütleleri ve frekansları sırasıyla: M, ω ve μ, Ω 'dır.

Bu iki harmonik salıncının toplam enerjileri iki bağımsız harmonik salıncının enerjileri toplamıdır (dersten biliyoruz):

$$E_{n_1, n_2} = \hbar \omega \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar \Omega \left(n_2 + \frac{1}{2} \right)$$

$$n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$$

$$(a) \quad |\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |\varphi_n\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t/2} \sum_n c_n |\varphi_n\rangle e^{-i\Omega n t}$$

$$P = \sum_m c_m^* \langle \varphi_m | e^{+i\omega t/2} e^{i\Omega m t} \sum_n c_n |\varphi_n\rangle e^{-i\omega t/2} e^{-i\Omega n t}$$

$$- (c_0^* \langle \varphi_0 | e^{i\omega t/2} c_0 | \varphi_0 \rangle e^{-i\omega t}$$

$$+ c_1^* \langle \varphi_1 | e^{i\omega t/2} e^{i\Omega t} c_1 | \varphi_1 \rangle e^{i\omega t/2} e^{-i\Omega t})$$

$$= \sum_m \sum_n c_m^* c_n \langle \varphi_m | \varphi_n \rangle e^{-i\omega(m-n)} (|c_0|^2 + |c_1|^2)$$

4

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 - (|c_0|^2 + |c_1|^2) = 1 - (|c_0|^2 + |c_1|^2)$$

$$P = 0 \Rightarrow 0 = 1 - |c_0|^2 - |c_1|^2$$

$$\Rightarrow |c_1|^2 \neq 0, |c_0|^2 \neq 0$$

$$(b) |\psi(0)\rangle = c_0|\varphi_0\rangle + c_1|\varphi_1\rangle$$

$$1 = \langle \psi(0) | \psi(0) \rangle = |c_0|^2 + |c_1|^2 \dots (1)$$

$$\langle H \rangle = \langle \psi(0) | \psi(0) \rangle$$

$$= (c_0^* \langle \varphi_0 | + c_1^* \langle \varphi_1 |) H (c_0 |\varphi_0\rangle + c_1 |\varphi_1\rangle)$$

$$\hbar\omega = |c_0|^2 \frac{\hbar\omega}{2} + |c_1|^2 \frac{3\hbar\omega}{2}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} |c_0|^2 + 3|c_1|^2 &= 2 \\ |c_0|^2 + |c_1|^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} |c_1|^2 &= \frac{1}{2} \\ |c_0|^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(c) |\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi_0\rangle + \frac{e^{i\theta_1}}{\sqrt{2}} |\varphi_1\rangle$$

$$\langle X \rangle = \langle \psi(0) | X | \psi(0) \rangle$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \langle \varphi_0 | + \frac{e^{-i\theta_1}}{\sqrt{2}} \langle \varphi_1 | \right) \left(\frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi_0\rangle + \frac{e^{i\theta_1}}{\sqrt{2}} |\varphi_1\rangle \right)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{1}{2} \left[\langle \varphi_0 | + e^{-i\theta_1} \langle \varphi_1 | \right] \left(0 + e^{i\theta_1} |\varphi_0\rangle \right)$$

$$+ |\varphi_1\rangle + \sqrt{2} e^{i\theta_2} |\varphi_2\rangle \Big]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1}) = \cos \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3}$$

⑤

$$\begin{aligned}
 (d) \quad |\varphi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t/2} |\varphi_0\rangle + \frac{e^{i\theta_1}}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t/2} e^{-i\omega t} |\varphi_1\rangle \\
 &= \frac{e^{-i\omega t/2}}{\sqrt{2}} (|\varphi_0\rangle + e^{i\theta_1} e^{-i\omega t} |\varphi_1\rangle)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle X \rangle(t) &= \frac{1}{2} \left[\langle \varphi_0 | + e^{-i\theta_1} e^{i\omega t} \langle \varphi_1 | \right] \left(\frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \right) \\
 &\quad \cdot (|\varphi_0\rangle + e^{i\theta_1} e^{-i\omega t} |\varphi_1\rangle) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right) \left[\langle \varphi_0 | + e^{-i\theta_1} e^{i\omega t} \langle \varphi_1 | \right] (e^{i\theta_1} e^{-i\omega t} |\varphi_0\rangle \\
 &\quad + |\varphi_1\rangle + \sqrt{2} e^{i\theta_1} e^{-i\omega t} |\varphi_2\rangle) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right) \left[e^{-i(\theta_1 - \omega t)} + e^{-i(\theta_1 + \omega t)} \right] \\
 &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right) \cos(\omega t - \theta_1)
 \end{aligned}$$

③

$$(a) \hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2 - qE\hat{x}$$

$$\hat{y} = \hat{x} - qE/m\omega^2$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \left(\hat{y} + \frac{qE}{m\omega^2} \right)^2 - qE \left(\hat{y} + \frac{qE}{m\omega^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \left(\hat{y}^2 + 2\hat{y} \frac{qE}{m\omega^2} + \frac{q^2 E^2}{m^2 \omega^4} \right) - qE\hat{y} - \frac{q^2 E^2}{m\omega^2}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{y}^2 - \frac{1}{2} \frac{q^2 E^2}{m\omega^2}$$

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{y}^2$$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{1}{2} \frac{q^2 E^2}{m\omega^2}$$

Bu harmonik salınımı Hamiltoniyeni ile aynı karaktere sahiptir.

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{H} | n \rangle &= \langle n | \hat{H}_0 | n \rangle + \langle n | \left(-\frac{1}{2} \frac{q^2 E^2}{m\omega^2} \right) | n \rangle \\ &= \left(\frac{1}{2} + n \right) \hbar \omega - \frac{1}{2} \frac{q^2 E^2}{m\omega^2} \end{aligned}$$

$$(b) \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle$$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = 0$$

⑦

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{X} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{X}, \hat{H}] \rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{X}, \frac{1}{2m} \hat{P}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{X}^2 - q \epsilon_0 \hat{X} \cos \omega t] \rangle$$

$$[\hat{X}, \hat{X}] = 0, \quad [\hat{P}, \hat{X}] = -i\hbar$$

$$[\hat{P}, \hat{X}^2] = \hat{X} [\hat{P}, \hat{X}] + [\hat{P}, \hat{X}] \hat{X} = -2i\hbar \hat{X}$$

$$[\hat{P}^2, \hat{X}] = \hat{P} [\hat{P}, \hat{X}] + [\hat{P}, \hat{X}] \hat{P} = -2i\hbar \hat{P}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \hat{X} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{X}, \frac{1}{2m} \hat{P}^2] \rangle$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \hat{X} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{X}, \frac{1}{2m} \hat{P}^2] \rangle = \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{2m} 2i\hbar \langle \hat{P} \rangle$$

$$= \frac{\langle \hat{P} \rangle}{m}$$

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{P} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{P}, \hat{H}] \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{P}, \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{X}^2 - q \epsilon_0 \hat{X} \cos \omega t] \rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \left(\frac{1}{2} m \omega^2 (-2i\hbar \langle \hat{X} \rangle) - q \epsilon_0 \cos \omega t (-i\hbar) \right)$$

$$= -m \omega^2 \langle \hat{X} \rangle + q \epsilon_0 \cos \omega t \quad \dots (2)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{H} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{H}] \rangle + \langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \rangle = \langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \rangle$$

$$= q \epsilon_0 \omega \langle \hat{X} \rangle \sin \omega t$$

8

$$\begin{aligned}
 (c) \quad \frac{d^2 \langle \hat{X} \rangle}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \langle \hat{X} \rangle \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \langle \hat{p} \rangle \right) \\
 &= \frac{1}{m} \frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle \\
 &= -\omega^2 \langle \hat{X} \rangle + (q \varepsilon_0 / m) \cos \omega t
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt^2} \langle \hat{X} \rangle = -\omega^2 \langle \hat{X} \rangle + \frac{q \varepsilon_0}{m} \cos \omega t$$

Denklemin çözümü ödev

$$\langle \hat{X} \rangle(t) = \langle \hat{X} \rangle(0) \cos \omega t + \frac{q \varepsilon_0}{m \omega} \sin \omega t + R$$

$$\langle \hat{X} \rangle(0) = x_0 \Rightarrow R = 0$$

$$\langle \hat{X} \rangle(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{q \varepsilon_0}{m \omega} \sin \omega t$$

9

$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \text{ (a) } \psi(p, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \psi(x, 0) dx \\
 &= \frac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a - ipx/\hbar} dx \\
 &= \frac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\left(\frac{x}{a} + \frac{ip}{2\hbar}\right)^2} e^{-a^2 p^2 / 4\hbar^2} \\
 &= \frac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-a^2 p^2 / 4\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} a dy e^{-y^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi} \\
 &= \frac{Aa}{\sqrt{2\hbar}} e^{-a^2 p^2 / 4\hbar^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{(b) } i\hbar \frac{\partial \psi(p, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(p, t) = \frac{p^2}{2m} \psi(p, t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi(p, t)}{\psi(p, t)} = -\frac{ip^2}{2m\hbar} dt$$

$$\Rightarrow \psi(p, t) = B e^{-(ip^2/2m\hbar)t}$$

$$\psi(p, 0) = \frac{Aa}{\sqrt{2\hbar}} e^{-a^2 p^2 / 4\hbar^2} = B$$

$$\psi(p, t) = \frac{Aa}{\sqrt{2\hbar}} e^{-a^2 p^2 / 4\hbar^2} e^{-i(p^2/2m\hbar)t}$$

10

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \psi(p,t) dp$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/\hbar} \frac{Aa}{\sqrt{2\hbar}} \exp\left(-\frac{a^2 p^2}{4\hbar^2} - \frac{ip^2 t}{2m\hbar}\right) dp$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{Aa}{\sqrt{2\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left[-\frac{a^2 p^2}{4\hbar^2} - \frac{ip^2 t}{2m\hbar} + \frac{ipx}{\hbar}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\hbar} Aa \exp\left[-\frac{x^2}{a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}}\right] \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left[-\left(\frac{a^2}{4\hbar^2} + \frac{it}{2m\hbar}\right)p^2 - \frac{ipx}{\hbar} + \frac{x^2}{a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}}\right]$$

$$= \frac{Aa}{2\hbar\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}}\right] \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left[\sqrt{\frac{a^2}{4\hbar^2} + \frac{it}{2m\hbar}} p + i \frac{x}{\sqrt{a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}}}\right]^2$$

$$y = \sqrt{\frac{a^2}{4\hbar^2} + \frac{it}{2m\hbar}} p + i \frac{x}{\sqrt{a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}}}$$

$$dy = \frac{1}{2\hbar} \sqrt{a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}} dp$$

(11)

$$\psi(x,t) = \frac{Aa}{2\hbar\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}}} \exp\left[-\frac{x^2}{a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}}\right] \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2}$$

$$\psi(x,t) = \frac{Aa}{\sqrt{a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}}} \exp\left[-\frac{x^2}{a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}}\right]$$

(12)

$$(a) e^{i p l / \hbar} x e^{-i p l / \hbar} = e^{i p l / \hbar} \left[i \hbar \frac{d}{d p} e^{-i p l / \hbar} + e^{i p l / \hbar} x \right] \\ = l + x$$

$e^{i p l / \hbar}$: x 'i $x+l$ 'ye öteker. Bu özellikten yararlanarak $\hat{a}$ operatörünün $e^{i p l / \hbar}$ operatörü altında davranışını ele alalım

$$e^{i p l / \hbar} \hat{a} e^{-i p l / \hbar} = e^{i p l / \hbar} (\hat{x} + \hat{p}) \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i p l / \hbar}; \quad \hat{x} = \sqrt{\frac{m \omega}{\hbar}} x \\ = e^{i p l / \hbar} \sqrt{\frac{m \omega}{2 \hbar}} x e^{-i p l / \hbar} \quad \hat{p} = \sqrt{m \omega \hbar} p \\ + e^{i p l / \hbar} \sqrt{\frac{m \omega \hbar}{2}} p e^{-i p l / \hbar} \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m \omega}{2 \hbar}} (x+l) + \sqrt{\frac{m \omega \hbar}{2}} p \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{m \omega}{\hbar}} x + \sqrt{m \omega \hbar} p \right] + \sqrt{\frac{m \omega}{2 \hbar}} l \\ = \hat{a} + \sqrt{\frac{m \omega}{2 \hbar}} l$$

veya

$$[e^{i p l / \hbar}, \hat{a}] = [e^{i p l / \hbar}, \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + \hat{p})]$$

$$= [-e^{i p l / \hbar}, \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x}]$$

$$= -\sqrt{\frac{m \omega}{2 \hbar}} (-i \hbar \frac{d}{d p} e^{i p l / \hbar})$$

$$= +\sqrt{\frac{m \omega}{2 \hbar}} l e^{i p l / \hbar} \dots (1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{p}] &= i \hbar \\ [\hat{x}, e(\hat{p})] &= -i \hbar \frac{d}{d p} e(\hat{p}) \end{aligned}}$$

Yukarıda bulduğumuz komütasyon bağıntısından $\langle n-1 | e^{i p l / \hbar} | 0 \rangle$ matris elemanını bulalım

(13)

(1) key

$$\begin{aligned}
 \langle n-1 | [e^{ip/\hbar}, \hat{a}] | 0 \rangle &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \ell \langle n-1 | e^{ip/\hbar} | 0 \rangle \\
 &= \langle n-1 | (e^{ip/\hbar} \hat{a} - \hat{a} e^{ip/\hbar}) | 0 \rangle \\
 &= \langle n-1 | e^{ip/\hbar} \hat{a} | 0 \rangle - \langle n-1 | \hat{a} e^{ip/\hbar} | 0 \rangle \\
 &= - \langle n-1 | \hat{a} e^{ip/\hbar} | 0 \rangle \\
 &= -\ell \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \ell \langle n-1 | e^{ip/\hbar} | 0 \rangle \dots (2)
 \end{aligned}$$

Öte yandan $\langle n-1 | \hat{a} = (\hat{a}^\dagger | n-1 \rangle)^\dagger$

$$= (\langle n | n \rangle)^\dagger = \sqrt{n} \langle n |$$

$$\langle n | = \frac{1}{\sqrt{n}} \langle n-1 | \hat{a}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \langle n | e^{ip/\hbar} | 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}} \langle n-1 | \hat{a} e^{ip/\hbar} | 0 \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \ell \langle n-1 | e^{ip/\hbar} | 0 \rangle \dots (3)
 \end{aligned}$$

Şimdi $\langle n-2 | [e^{ip/\hbar}, \hat{a}] | 0 \rangle$ ifadesini hesaplayalım

$$\begin{aligned}
 \langle n-2 | [e^{ip/\hbar}, \hat{a}] | 0 \rangle &= - \langle n-2 | \hat{a} e^{ip/\hbar} | 0 \rangle \\
 &= -\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \ell \langle n-2 | e^{ip/\hbar} | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle n-2 | \hat{a} &= (\hat{a}^\dagger | n-2 \rangle)^\dagger = (\sqrt{n-1} | n-1 \rangle)^\dagger \\
 &= \sqrt{n-1} \langle n-1 |
 \end{aligned}$$

Şerine göre!

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \langle n-1 | e^{ip/\hbar} | 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{n-1}} \langle n-2 | \hat{a} e^{ip/\hbar} | 0 \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \ell \langle n-2 | e^{ip/\hbar} | 0 \rangle \dots (4)
 \end{aligned}$$

(14)

(2) eşitliğini (3) eşitliğinde yerine koy:

$$\langle n | e^{i p / \hbar} | 0 \rangle = \frac{l^2}{\sqrt{n(n-1)}} \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right) \langle n-2 | e^{i p / \hbar} | 0 \rangle \dots (5)$$

bulunur. Benzer şekilde $\langle n-2 | e^{i p / \hbar} | 0 \rangle$ ve diğer ~~simetrik~~ $\langle n-4 | e^{i p / \hbar} | 0 \rangle$, $k=1, 2, 3, \dots, n$ elemanlarını hesaplayarak

$$\langle n | e^{i p / \hbar} | 0 \rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^{n/2} \langle 0 | e^{i p / \hbar} | 0 \rangle \dots (5a)$$

elde edilir. Temel durum matris elemanını hesap edelim:

$$\begin{aligned} \langle 0 | e^{i p / \hbar} | 0 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle 0 | x \rangle \langle x | e^{i p / \hbar} | 0 \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_0^*(x) e^{i \left(-i \hbar \frac{d}{dx} \right) / \hbar} \psi_0(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_0^*(x) e^{l \frac{d}{dx}} \psi_0(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_0^*(x) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dx^m} \psi_0(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_0^*(x) \left[\psi_0(x) + l \frac{d}{dx} \psi_0(x) + \frac{l^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} \psi_0(x) + \dots \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_0^*(x) \psi_0(x+l) \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} (x+l)^2} \end{aligned}$$

(15)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \langle 0 | e^{i\hat{p}l/\hbar} | 0 \rangle &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - \frac{m\omega}{\hbar}xl - \frac{m\omega}{2\hbar}l^2} \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{m\omega}{\hbar}(x+\frac{l}{2})^2} e^{-\frac{m\omega}{4\hbar}l^2} \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{4\hbar}l^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{m\omega}{\hbar}y^2} \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{4\hbar}l^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{m\omega}{\hbar}y^2} ; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}y^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{m\omega}} \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{4\hbar}l^2} 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} = e^{-\frac{m\omega}{4\hbar}l^2} \dots (6)
\end{aligned}$$

(6)'ya (5a)'da yerine yazalım!

$$\langle n | e^{i\hat{p}l/\hbar} | 0 \rangle = e^{-\frac{m\omega}{4\hbar}l^2} \frac{(-l)^n}{\sqrt{n!}} \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^{n/2} \dots (7)$$

Hatırlatma:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-m\omega x^2/2\hbar} H_n \left(x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right)$$

H_n 'nin generatörleri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(s) = e^{-z^2 + 2zs}$$

16

$$(b) |\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) |n\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) e^{-iEt/\hbar} |n\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle$$

$$\langle x | \psi(t) \rangle = \psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) e^{-iE_n t/\hbar} \phi_n(x) ; \phi_n(x) = \langle x | n \rangle$$

$$c_n(0) = c_n = \langle n | \psi(0) \rangle = \langle n | e^{-i p^2 / 2m \hbar} | 0 \rangle$$

$$= e^{-m\omega^2 x^2 / 4\hbar} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^{n/2}$$

$$\Rightarrow \psi(x, t) = e^{-m\omega^2 x^2 / 4\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^{n/2} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} \phi_n(x)$$

$$= e^{-m\omega^2 x^2 / 4\hbar} e^{-i\omega t/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^{n/2} e^{-i\omega n t} \phi_n(x)$$

$$\rightarrow \phi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-m\omega x^2 / 2\hbar} H_n \left(x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right) \text{ yaz!}$$

$$\Rightarrow \psi(x, t) = e^{-m\omega^2 x^2 / 4\hbar} e^{-i\omega t/2} e^{-m\omega x^2 / 4\hbar} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(e^{-i\omega t} \sqrt{\frac{m\omega}{4\hbar}} \right)^n H_n \left(x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right)$$

..... (8)

17

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\left(-l e^{-i\omega t} \sqrt{\frac{m\omega}{4\hbar}} \right)^n}_z H_n \left(\overbrace{x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}}^g \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n H_n(g) \\ = e^{-z^2 + 2zg}$$

Bu ifadeyi (8) de yerine yaz

$$\psi(x,t) = \left(\frac{m\omega}{4\hbar} \right)^{1/4} e^{-m\omega l^2/4\hbar} e^{-i\omega t/2} e^{-m\omega x^2/2\hbar} e^{-z^2 + 2zg} \dots (9)$$

$$\begin{aligned} -z^2 + 2zg &= -\left(-l e^{-i\omega t} \sqrt{\frac{m\omega}{4\hbar}} \right)^2 + 2 \left(-l e^{-i\omega t} \sqrt{\frac{m\omega}{4\hbar}} \right) \left(x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right) \\ &= -\frac{m\omega}{4\hbar} l^2 (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) - \frac{2m\omega}{2\hbar} l x (\cos \omega t - i \sin \omega t) \\ &= -\frac{m\omega}{2\hbar} l^2 \cos^2 \omega t - \frac{m\omega}{\hbar} l x \cos \omega t + \frac{m\omega}{4\hbar} l^2 \\ &\quad + \frac{m\omega}{2\hbar} l^2 i \sin \omega t \cos \omega t + \frac{m\omega}{\hbar} l x i \sin \omega t \\ &= \frac{m\omega}{4\hbar} l^2 - \frac{m\omega}{\hbar} l \left(\frac{i \cos \omega t}{2} x \right) + \frac{m\omega}{\hbar} i l \sin \omega t \left(\frac{x}{2} \cos \omega t + x \right) \end{aligned}$$

Bu son ifadeyi (9) da yazalım

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \left(\frac{m\omega}{4\hbar} \right)^{1/4} e^{-m\omega l^2/4\hbar} e^{-i\omega t/2} e^{-m\omega x^2/2\hbar} (x^2 + 2xl \cos \omega t + l^2 \cos^2 \omega t) \\ &\quad \times e^{(i m \omega l/2\hbar) \sin \omega t (l \cos \omega t + 2x)} e^{-m\omega l^2/4\hbar} \\ &= \left(\frac{m\omega}{4\hbar} \right)^{1/4} e^{-i\omega t/2} e^{+i \frac{m\omega}{2\hbar} l (2x + l \cos \omega t) \sin \omega t} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} (x + l \cos \omega t)^2} \end{aligned}$$

19

$$|\psi(x,t)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}(x+l\cos\omega t)^2}$$

$\Rightarrow$ Olasılık yoğunluğu $l\cos\omega t$ 'de merkezlenen bir Gaussiyandır!

$$(c) \langle X \rangle_t = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx x e^{-\frac{m\omega}{\hbar}(x+l\cos\omega t)^2}$$

$$y = x + l\cos\omega t \Rightarrow dy = dx$$

$$\langle X \rangle_t = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dy (y - l\cos\omega t) e^{-y^2 \frac{m\omega}{\hbar}} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{m\omega}{\hbar} y^2} y - l\cos\omega t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar} y^2} dy \right)$$

(Gitt fonksiyon) x (tek fonksiyon)

$$= -l \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \cos\omega t \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} = -l\cos\omega t$$

$$\langle X^2 \rangle_t = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{m\omega}{\hbar}(x+l\cos\omega t)^2} x^2$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dy (y^2 + l^2\cos^2\omega t - 2l(\cos\omega t)y) e^{-m\omega y^2/\hbar}$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 e^{-m\omega y^2/\hbar} + l^2\cos^2\omega t \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{m\omega y^2}{\hbar}} \right.$$

$$\left. - 2l\cos\omega t \int_{-\infty}^{\infty} dy y e^{-m\omega y^2/\hbar} \right]$$

(19)

$$\Rightarrow \langle X^2 \rangle_t = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \left[2 \frac{1}{4} \frac{\hbar}{m\omega} \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} + 2l^2 \cos^2 \omega t \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \right]$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} + l^2 \cos^2 \omega t$$

$$(\Delta X)_t^2 = \langle X^2 \rangle_t - \langle X \rangle_t^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$\langle P \rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) \psi(x,t)$$

$$= -i\hbar \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[e^{-\frac{m\omega}{\hbar} (x+l\cos\omega t)^2} \frac{m\omega}{2\hbar} (i\sin\omega t - 2(x+l\cos\omega t)) \right]$$

$$= -i\hbar \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[e^{-\frac{m\omega}{\hbar} y^2} \frac{m\omega}{2\hbar} (i\ell \sin\omega t - 2y) \right]$$

$$= \frac{m\omega}{2} \ell \sin\omega t$$

$$\langle P^2 \rangle_t = \frac{\hbar m \omega}{2} + \frac{m^2 \omega^2 \ell^2}{4} \sin^2 \omega t \Rightarrow \text{ÖDEV}$$

$$(\Delta P)_t^2 = \langle P^2 \rangle_t - \langle P \rangle_t^2 = \frac{\hbar m \omega}{2}$$

$$(\Delta X)_t^2 (\Delta P)_t^2 = \frac{\hbar^2}{4} \rightarrow \text{zaman} \text{ dan bağımsız ve en küçük belirsizlik dağılımı!}$$