

Kısmi Diferansiyel Denklemler / GAUSS SORULARI

1) $XU_x + XYU_y - U = 0$ Genel çözümünü bulunuz ($U = U(x, y)$)

2) $U_x + U_y + U_z = U$, $U = U(x, y, z)$

a) Genel çözümünü bulunuz.

b) $U(x, y, 0) = x^2 - y^2$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

4) $U_x + xU_y = -x$, $U = U(x, y)$

a) Genel çözümünü bulunuz.

b) $U(x, x^2) = x^2 - 1$ koşulunu sağlayan integral yöntemini belirleyiniz.

5) $(x+U)U_x - (y+U)U_y + x - y = 0$, $U = U(x, y)$

Genel çözümünü bulunuz.

AÇIKLAMALAR (1) için : "Dönüşüm serresi, tenceler tespit edilmeli"

(2)

"Doğru bahsedilen dönüşüm benzer dönüşümler yapıldığında, dönüşümün tesisi alınabildiğinin gösterilmesine gerek yok" ; "K. eğriler" belirlenecek" ; "Koordinat dönüşümleri yapılarak G.G. bulunacak"

(4) için : "a) da Lagrange metodu kullanılacak" ; "b de koşul : parametrik ifade edilecek istenilen çözüm tespit edilecek"

(3) için : "Dönüşüm serresi, tencelerin belirlenmesine gerek yok"

3) $U_x + xU_y - xU_z = y + e^x z + \sin x$, $U = U(x, y, z)$

Genel çözümünü bulunuz.

$$x u_x - x y u_y - u = 0$$

iki değişkenli (değişken kartsayılı) lineer ; $a u_x + b u_y + c u = f$

$$a = x, b = -xy \Rightarrow k.o. : \boxed{\frac{dy}{dx} = -y} \quad \left(= \frac{b}{a} \text{ dir} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} dy = -dx \Rightarrow \ln|y| = -x + \ln|t| \Rightarrow y = t e^{-x}$$

Değişken.

$$\Rightarrow k.egriler : \boxed{e^x y = t}$$

Koordinat dönüşümleri : $\begin{cases} t = e^x y \\ z = y \end{cases}, \begin{cases} x = \ln|\frac{t}{z}| \\ y = z \end{cases}, V(t, z) = u(x, y)$

Dönüşüm sonrası türevler : $\begin{cases} u_x = \begin{bmatrix} V_t \\ V_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_x = e^x y \\ z_x = 0 \end{bmatrix} = e^x y V_t \\ u_y = \begin{bmatrix} V_t \\ V_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_y = e^x \\ z_y = 1 \end{bmatrix} = e^x V_t + V_z \end{cases}$

$$\Rightarrow x u_x - x y u_y - u = x e^x y V_t - x e^x y V_t - x y V_z + V = 0$$

$$\Rightarrow -z \ln|\frac{t}{z}| V_z + V = 0$$

NOT : t yi k.egriler yardımıyla belirlediklerimiz ; dönüşüm sonrasında V_t li terimin katsayısının sıfırlanacağını biliyor idik.

Soruda (açıklamalarda) dönüşüm sonrası türevlerin hesabı istendiğinden ara işlemleri yaparak bu durumu gösterdik.

$$\Rightarrow \int \frac{1}{V} dV = - \int \frac{1}{z \ln|\frac{z}{t}|} dz \quad I_1 \text{ için } w = \ln|\frac{z}{t}| \text{ değişken dönüşüm ile hesaplanabilir}$$

$$\Rightarrow \ln|V| = - \ln|\ln|\frac{z}{t}|| - \ln|C(t)| \Rightarrow V = \frac{C(t)}{\ln|\frac{z}{t}|}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x, y) = - \frac{C(e^x y)}{x}} \quad 0 \leq$$

$$U_x + U_y + U_z = U \quad , \quad U = U(x, y, z) \text{ denklemin GG.}$$

3-değişkenli lineer KDD. $aU_x + bU_y + cU_z + dU = f$

K.sistem :

$$\boxed{\begin{array}{c} dx \\ 1 \\ (1) \end{array} = \begin{array}{c} dy \\ 1 \\ (2) \end{array} = \begin{array}{c} dz \\ 1 \\ (3) \end{array}}$$

$$\left. \begin{array}{l} (2) \text{ ve } (1) \text{ den : } y = x + C_1 \Rightarrow y - x = C_1 = S_1 \\ (3) \text{ ve } (1) \text{ den : } z = x + C_2 \Rightarrow z - x = C_2 = S_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{K. eğriler : } \Gamma = S_1 \cap S_2$$

[Dikkat edilirse : S_1 ve S_2 yüzeyleri birer düzlem olduğundan, kesişimleri yani Γ bir doğruya dır ; $(y-x, z-x)$ bağımsız integraler]

$$\text{Koordinat değişimleri : } \begin{cases} \bar{x} = y - x \\ \bar{y} = z - x \\ \bar{z} = z \end{cases} , \quad U(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = U(x, y, z)$$

NOT : Bu değişimin tersini alılabildiğini zaten biliyoruz. Sonuçta (açıklamalarda) istemedikçe, göstermek zorunda değiliz.

$\bar{x}, \bar{y}$ yi : S_1 ve S_2 yardımıyla belirlediğimiz için : değişim sonrasında $U_{\bar{x}}$ ve $U_{\bar{y}}$ lerin katsayılarının sıfırlayacağını "deste verilen çözüm şablonundan" biliyoruz. Sonuçta (açıklamalarda) değişim sonrası türevlerin hesabı istediğinden ara işlemleri yapmak zorundayız.

Bu örnekte a, b, c, d, f : hepsi birden sabit olduğundan, değişimin tersini hesap etmek zorunda değiliz.

Dansun
Sonnus
Törevler

$$\left\{ \begin{array}{l} U_x = \begin{bmatrix} \bar{U}_x \\ \bar{U}_y \\ \bar{U}_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_x = -1 \\ \bar{y}_x = -1 \\ \bar{z}_x = 0 \end{bmatrix} = -\bar{U}_x - \bar{U}_y \\ U_y = " \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_y = 1 \\ \bar{y}_y = 0 \\ \bar{z}_y = 0 \end{bmatrix} = \bar{U}_x \\ U_z = " \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_z = 0 \\ \bar{y}_z = 1 \\ \bar{z}_z = 1 \end{bmatrix} = \bar{U}_y + \bar{U}_z \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow U_x + U_y + U_z - U =$$

$$= -\cancel{\bar{U}_x} - \cancel{\bar{U}_y} + \cancel{\bar{U}_x} + \cancel{\bar{U}_y} + \bar{U}_z - \bar{U} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{U}_z - \bar{U} = 0}$$

Adı def den metolla qonibilla dek. e dansun

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} = \bar{U} \Rightarrow \frac{1}{\bar{U}} \partial \bar{U} = \partial \bar{z}$$

Değil Avr.

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\bar{U}} \partial \bar{U} = \int \partial \bar{z} \Rightarrow \ln |\bar{U}| = \bar{z} + \ln |c(x, y)|$$

$$\Rightarrow \bar{U} = c(x, y) e^{\bar{z}}$$

$$\Rightarrow \boxed{U(x, y, z) = c(y-x, z-x) e^z} \quad \text{G.G.}$$

$$\begin{aligned}
 & U(x, y, 0) = x^2 - y^2 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \\
 & (y=0, z=0, u=x^2-y^2) \quad \left\{ \begin{aligned} & U(x, y, 0) = C(y-x, 0-x) e^0 = x^2 - y^2 \\ & \text{II} \\ & C(\underbrace{y-x}_{=r}, \underbrace{-x}_{=k}) = x^2 - y^2 \\ & \quad \text{direkt.} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -k \\ y = r - k \end{cases} \text{ oder } \Rightarrow C(r, k) = k^2 - (r-k)^2 = -r^2 + 2k$$

$$\Rightarrow C(y-x, z-x) = 2(z-x) - (y-x)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{U = [2(z-x) - (y-x)^2] e^z}$$

istarter
Lösung

$$U_x + x U_y - x U_z = y + e^x z + \sin x, \quad U = U(x, y, z)$$

3- değrskali (değrskel katsayılı) lineer k.o.p. $a U_x + b U_y + c U_z + d U = f$

K. sistem :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \frac{dx}{1} & = & \frac{dy}{x} = \frac{dz}{-x} \\ (1) & & (2) \end{array}}$$

(2) ve (1) ta : $dy = x dx \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow \underline{y - \frac{x^2}{2} = C_1} : S_1$

(3) ve (1) den : $dz = -x dx \Rightarrow \underline{z + \frac{x^2}{2} = C_2} : S_2$

$\Rightarrow$ K. eğnle : $\Gamma = S_1 \cap S_2$ ($y - \frac{x^2}{2}, z + \frac{x^2}{2}$ bağımsız int.ller)

Simdi, koordinat dönüşümünü birar forklüştürelim.

U_y ve U_z nin katsayıları : değrskel katsayılı, U_x m sabit katsayılı;

$\bar{y}$ ve $\bar{z}$ yi : $S_1 - S_2$ yardımıyla belirleyelim ve $\bar{U}_y, \bar{U}_z$ sıfırlasın.

Ayrıca : y ve z olduğundan : dönüşümün tersi belirlemekle dikkat edilirse de bu işlemler kolay olucak.

Koordinat dönüşümleri :

$$\begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = y - \frac{x^2}{2} \\ \bar{z} = z + \frac{x^2}{2} \end{cases}, \quad \bar{U}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = U(x, y, z).$$

Tersi :

$$\begin{cases} x = \bar{x} \\ y = \bar{y} + \frac{\bar{x}^2}{2} \\ z = \bar{z} - \frac{\bar{x}^2}{2} \end{cases} \text{ kolaylıkla bulunur}$$

$\Rightarrow$ (Dönüşüm sırasında, $U_x + x U_y - x U_z = \bar{U}_{\bar{x}}$ olacağını biliyoruz)
Ara işlem istemiyor

$$\Rightarrow \bar{U}_{\bar{x}} = \bar{y} + \frac{\bar{x}^2}{2} + e^{\bar{x}} \left(\bar{z} - \frac{\bar{x}^2}{2} \right) + \sin \bar{x}$$

Doğrudan integrasyon ile çalışabilir

$$\Rightarrow \bar{U} = \bar{y} \int d\bar{x} + \int \frac{\bar{x}^2}{2} d\bar{x} + \bar{z} \int e^{\bar{x}} d\bar{x} - \frac{1}{2} \int \bar{x}^2 e^{\bar{x}} d\bar{x} + \int \sin \bar{x} d\bar{x} + C(\bar{y}, \bar{z})$$

kism. integrasyon
 $= e^{\bar{x}}(\bar{x}^2 - 2\bar{x} + 2)$

$$\Rightarrow \bar{U} = \bar{x}\bar{y} + e^{\bar{x}}\bar{z} + \frac{\bar{x}^3}{6} - \frac{1}{2}e^{\bar{x}}(\bar{x}^2 - 2\bar{x} + 2) - \cos \bar{x} + C(\bar{y}, \bar{z})$$

$$\Rightarrow U(x, y, z) =$$

G.G. $= x(y - \frac{x^2}{2}) + e^x(z + \frac{x^2}{2}) + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}e^x(x^2 - 2x + 2) - \cos x + C(y - \frac{x^2}{2}, z + \frac{x^2}{2})$

$U_x + x U_y = x$ denklemin $U(x, x^2) = x^2 - 1$ koşulunu sağlayan integral gösteri?

lineer, Lagrange metodu ; $aU_x + bU_y - c = 0$

$$U_x + x U_y - x U_z = 0 \Rightarrow \text{K sistemi} \quad \boxed{\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{-x}}$$

ilk integraleri önceki soruda bulmuştuk

$$\Rightarrow \text{G.G.} \quad F\left(y - \frac{x^2}{2}, z + \frac{x^2}{2}\right) = 0$$

$$U(x, \underbrace{x^2}_{=y}) = x^2 - 1 \Rightarrow \Pi(\underbrace{t}_{=x}, \underbrace{t^2}_{=y}, \underbrace{t^2-1}_{=z})$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} y - \frac{x^2}{2} &= c_1 \\ z + \frac{x^2}{2} &= c_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} t^2 - \frac{t^2}{2} &= c_1 \quad (I) \\ t^2 - 1 + \frac{t^2}{2} &= c_2 \quad (II) \end{aligned} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$(I) \text{ den } t^2 = 2c_1$$

$$\Rightarrow \text{(II) de } y \text{ statt}$$

$$2c_1 - 1 + c_1 = c_2$$

$$\Downarrow$$

$$3c_1 - 1 = c_2$$

$$\Downarrow z = 1 \text{ ablesen}$$

$$3y - \frac{3x^2}{2} - 1 = 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$\Downarrow \text{ ist teilen kann}$$

$$\boxed{U = 3y - 2x^2 - 1}$$

$$(x+u)u_x - (y+u)u_y + x - y = 0$$

quasi-linear, Lagrange metode; $au_x + bu_y - c = 0$

$$(x+z)u_x - (y+z)u_y + (y-x)u_z = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} \frac{dx}{x+z} & = & \frac{dy}{-y-z} = \frac{dz}{y-x} \quad (=dt) \\ \text{K.Sistem} & & \begin{array}{cc} (1) & (2) & (3) \end{array} \end{array}$$

$$(1)+(2)+(3) \text{ da: } \frac{dx+dy+dz}{0} = \frac{d(x+y+z)}{0} \quad (=dt)$$

$$\Rightarrow \underline{x+y+z = c_1} : S_1$$

$$\frac{y(1)}{y} = \frac{x(2)}{x} = \frac{z(3)}{z} \text{ da } \frac{y dx}{xy+yz} = \frac{x dy}{-xy-xz} = \frac{z dz}{yz-xz}$$

$$\Rightarrow \frac{y dx + x dy - z dz}{0} \Rightarrow \underbrace{y dx + x dy}_{=d(xy)} - z dz = 0$$

$$\Rightarrow \int d(xy) = \int z dz$$

$$\Rightarrow xy = \frac{z^2}{2} + \frac{c_2}{2} \Rightarrow \underline{2xy - z^2 = c_2} : S_2$$

$\Rightarrow$
(S1)-(S2) + c
da $t=1$

$$\boxed{F(x+y+u, 2xy-u^2) = 0} \quad \text{G.C.}$$