

Analiz III

Çalışma Soruları –1 02.11.2015

A. Aşağıda verilen fonksiyon dizi ve fonksiyon serilerinin yanlarında yazılı aralıklar üzerinde Düzgün Yakınsak olup olmadığını araştırınız. İstenilen limitleri bulunuz.

1. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{3n}}$; $E_1 = [0, 1]$, $E_2 = \left[0, \frac{1}{3}\right)$
2. $f_n(x) = \frac{nx}{2+n^4x^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sin nx) f_n(x)$; $[1, \infty)$
3. $f_n(x) = \frac{nx^2}{n+x}$, $\frac{1}{f_n(x)}$ ($n=1, 2, \dots$) ve $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$; $[1, 2]$
4. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt[5]{n^6+x^6}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$; $[1, \infty)$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$; $[0, \infty)$. $\lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2} = ?$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n^x}$; $[0, \infty)$. $\lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n^x} = ?$
7. $f_n(x) = \sqrt[n]{\cos x}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$; $[0, \pi/2]$
8. $f_n(x) = \frac{nx}{2+n^7x^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$; $[0, \infty)$

B. Aşağıda verilen fonksiyon dizileri yanlarında yazılı aralıklar üzerinde Düzgün Yakınsak mı? yanıtınızı Cauchy Kriterini kullanarak kanıtlayınız.

9. $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n^3}$, $\mathbb{R}$ ($n=1, 2, \dots$)

10. $f_n(x) = \frac{1+2nx}{3+n^2x^2}$, $[0, 1]$ ($n=1, 2, \dots$)

11. $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^{3n}}$; $[0, 1)$ ($n=1, 2, \dots$)



C. Aşağıdaki kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçapını, yakınsaklık bölgesini (aralığını) belirleyiniz (uç noktalarda yakınsaklık araştırması yapınız).

2/15

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+1)} x^n$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{5^n} (x-1)^n$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3} x^n$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

16. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)2^n} x^n$

17. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^{3/2}-1)2^n} x^n$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3n} (x-3)^n$



Not: Yanıtlar-Yol göstermeler kontrol amaçlıdır, yazım hatası - eksiklikler vs.. olabilir. Çözümlerin hemen hepsinde ara işlemler eksiktir, ara işlemleri tamamlayarak yaptığınız kendi çözümlerinizi mutlaka karşılaştırınız..

Yanıtlar-Yol Göstermeler...

(son güncelleme : 02.11.2015)

$f(x) : f_n(x)$ in Noktasal limit fonksiyonu, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

$$g(x) := |f_n(x) - f(x)|,$$

$$M_n := \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|,$$

$\varphi_n : |f_n(x) - f(x)| \leq \varphi_n$ şeklindeki **sıfır dizisi**.

A1. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{3n}}$, $E_1 = [0, 1]$, $E_2 = \left[0, \frac{1}{3}\right)$

$(f_n) : E_1$ üzerinde Düzgün Yakınsak Değil

Noktasal limit fonksiyonunun sürekliliğine bakınız.

$(f_n) : E_2$ üzerinde Düzgün Yakınsak

$$\varphi_n = \frac{1}{3^n} \text{ elde edip açıklayınız.}$$

A2. $f_n(x) = \frac{nx}{2+n^4x^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sin nx) f_n(x) ; [1, \infty)$

$(f_n) : [1, \infty)$ üzerinde Düzgün Yakınsak

$$g(x) \underset{2>0 \text{ dan}}{\leq} \frac{nx}{n^4x^2} = \frac{1}{n^3x} \underset{x \geq 1 \text{ dan}}{\leq} \frac{1}{n^3} = \varphi_n$$

şeklinde devam ediniz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sin nx) f_n(x) : [1, \infty) \text{ üzerinde}$$

Düzgün Yakınsak

$$|(-1)^n (\sin nx) f_n(x)| \underset{|\sin nx| \leq 1 \text{ den}}{\leq} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}$$

ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ serisi yakınsaktır. Weierstrass

Testini uygulayınız.



A3. $f_n(x) = \frac{nx^2}{n+x}, \frac{1}{f_n(x)} \quad (n=1,2,\dots)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) ; [1,2]$

$(f_n) : [1,2]$ üzerinde Düzgün Yakınsak	$f_n(x) \rightarrow x^2 = f(x), x \in [1,2]$ $g(x) := f_n(x) - f(x) = \left \frac{nx^2}{n+x} - x^2 \right $ $= \left \frac{x^3}{n+x} \right $ $M_n \quad \underbrace{g(x) : E \text{ de Artan, gözleyiniz}}_{\downarrow} \quad g(2) = \frac{8}{n+2} \rightarrow 0$ Düzgün Yak.tır.
--	---

$\frac{1}{f_n(x)} = \frac{n+x}{nx^2} : [1,2]$ üzerinde Düzgün Yakınsak	$\frac{1}{f_n(x)} \rightarrow \frac{1}{x^2} = f^*(x), x \in [1,2]$ $\left \frac{1}{f_n(x)} - f^*(x) \right = \frac{1}{nx} \underbrace{\leq}_{x>1 \text{ den}} \frac{1}{n} = \underbrace{\varphi_n \rightarrow 0}_{\downarrow}$ Düzgün Yak.tır.
--	---

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n+x} : [1,2]$ üzerinde Düzgün Yakınsak değil	$f_n(x) = \frac{nx^2}{n+x} \rightarrow x^2 \neq 0 \Rightarrow "f_n(x) \rightrightarrows 0, x \in [1,2]"$ koşulu sağlanmaz!
--	---

A4. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt[5]{n^6 + x^6}}, \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) ; [1, \infty)$

$(f_n) : [1, \infty)$ üzerinde Düzgün Yakınsak	$f_n(x) \rightarrow 0 = f(x), x \in [1, \infty)$ (Sıkıştırma Teo.den gözleyebilirsiniz.) $g(x) \underbrace{\leq}_{ \sin nx \leq 1 \text{ ve } x \geq 1 \text{ den}} \frac{1}{\sqrt[5]{n^6 + 1}} = \varphi_n$ şeklinde devam ediniz.
--	--



$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[5]{n^6 + x^6}} : [1, \infty) \text{ üzerinde Düzgün}$ Yakınsak	$ f_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt[5]{n^6 + 1}} \text{ } \sin nx \leq 1 \text{ ve } x \geq 1 \text{ den}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^6 + 1}}$ serisi yakınsaktır (nedenini açıklayınız!) Weierstrass Testini uygulayınız.
---	--

A5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2} ; [0, \infty) . \ell = \lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2} = ?$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2} : [0, \infty) \text{ üzerinde Düzgün}$ Yakınsak	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n ; a_n(x) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{n}},$ $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ seçip Abel Testinin}$ Uygulayınız.
--	---

“$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2} : [0, \infty) \text{ üzerinde Düzgün Yakınsak}$” ve “$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ limiti mevcut” olduğundan: limit sembolü ile toplam sembolünün sırası değiştirilebilir. $\Rightarrow \ell = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (not: bu son seri: alterne seriler için Leibnitz Testinden yakınsaktır)	
--	--

A6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n^x} ; [0, \infty) . \ell = \lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n^x} = ?$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n^x} : [0, \infty) \text{ üzerinde Düzgün}$ Yakınsak	I.yol: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n ; a_n(x) = \frac{1}{n^x},$ $b_n = \frac{1}{3^n}$ seçip Abel Testinin Uygulayınız. II.yol: $f_n(x) \leq \frac{1}{3^n}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ serisi yakınsaktır (geometrik seri) Weierstrass Testini uygulayınız.
---	---



“ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n^x}$: $[0, \infty)$ üzerinde Düzgün Yakınsak” ve “ $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{3^n n^x} = \frac{1}{3^n}$ limiti mevcut”

olduğundan: **limit sembolü ile toplam sembolünün sırası değiştirilebilir.**

$$\Rightarrow \ell = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{3^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

(not: $0 < a < 1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ geometrik serisinin toplamı $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ ve bunun bir sonucu

olarak $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}$ olduğunu biliyoruz)

A7. $f_n(x) = \sqrt[n]{\cos x}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$; $E = [0, \pi/2]$

(f_n) : E üzerinde Düzgün Yakınsak
Değil

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi/2 \\ 0, & x = \pi/2 \end{cases}$$

Noktasal limit fonksiyonunun sürekliliğine bakınız.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\cos x} : E \text{ üzerinde}$$

Düzgün Yakınsak değil

” $f_n(x) \rightarrow 0$, $x \in E$ ” koşulu sağlanmaz!

A8. $f_n(x) = \frac{nx}{2 + n^7 x^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$; $[0, \infty)$

(f_n) : $[0, \infty)$ üzerinde Düzgün
Yakınsak

$$f_n(x) \rightarrow 0 = f(x) , x \in [0, \infty)$$

$$g(x) := |f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{2 + n^7 x^2}$$

$g'(x) = 0$ dan incelenirse $x = \frac{2}{n^7} \in [0, \infty)$ ($\forall n$ için)
maksimum noktadır. Sonuçta

$$M_n = \underbrace{g\left(\frac{2}{n^7}\right)}_{\substack{\downarrow \\ \text{Düzgün Yak.tır.}}} = \frac{2n}{2n^7 + 4} \rightarrow 0$$



$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{2+n^7x^2} \quad : \quad [1, \infty) \text{ üzerinde}$ Düzgün Yakınsak	$ f_n(x) \leq g\left(\frac{2}{n^7}\right) = \frac{2n}{2n^7+4}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n^7+4}$ serisi yakınsaktır (nedenini açıklayınız!) Weierstrass Testini uygulayınız.
--	---

B9. $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n^3}$, $E = \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$)

$$\varepsilon_0 = \frac{7}{8} > 0 \text{ sayısı verilsin. } \forall n_0 \in \mathbb{N} \text{ için } \begin{cases} n = n_0, m = 2n_0 \\ x_0 = n_0^3 \in E \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| = \left| 1 + \frac{n_0^3}{n_0^3} - \left(1 + \frac{n_0^3}{2^3 n_0^3} \right) \right| = \frac{7}{8} = \varepsilon_0$.

Buradan ise Cauchy Kriterinden, $(f_n) : E$ üzerinde Düzgün Yakınsak Değildir.

B10. $f_n(x) = \frac{1+2nx}{3+n^2x^2}$, $E = [0, 1]$. Benzer şekilde, $\varepsilon_0 = \frac{1}{28}$, $n = n_0$, $m = 2n_0$,

$x_0 = \frac{1}{n_0} \in E$ olarak devam ediniz.

B11. $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^{3n}}$; $E = [0, 1)$. Benzer şekilde, $\varepsilon_0 = \frac{171}{728}$, $n = n_0$, $m = 2n_0$,

$x_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n_0}} \in E$ olarak devam ediniz.



C12: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+1)} x^n$	$\limsup \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right = \lim \left(\frac{n}{n+1} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} \right) = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$ $ x < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ (i) $x = 1$ için $\sum \frac{1}{n(n^2+1)}$ yakınsak $[b_n = \frac{1}{n^3}$ seç K.T (ii) uygula!] (ii) $x = -1$ için $\sum \frac{(-1)^n}{n(n^2+1)}$ yakınsak [Mutlak-Yak. + Teo3] $\Rightarrow$ (i) ve (ii) den Y.B. = $[-1, 1]$
C13: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{5^n} (x-1)^n$	$\limsup \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right = \lim \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow R = \frac{1}{1/5} = 5$ $ x-1 < 5 \Rightarrow -4 < x < 6$ (i) $x = -4$ için $\sum n^2$ ıraksak $[\lim n^2 = \infty \neq 0, \text{ Sonuç1}]$ (ii) $x = 6$ için $\sum (-1)^n n^2$ ıraksak [Sonuç1] $\Rightarrow$ (i) ve (ii) den Y.B. = $(-4, 6)$
C14: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3} x^n$	$\limsup \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right = \lim \frac{3^{n+1}}{(n+1)^3} = 3 \Rightarrow R = \frac{1}{3}$ $ x < 1/3 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ (i) $x = 1/3$ için $\sum \frac{1}{n^3}$ yakınsak (ii) $x = -1/3$ için $\sum \frac{(-1)^n}{n^3}$ yakınsak [Mutlak-Yak. + Teo3] $\Rightarrow$ (i) ve (ii) den Y.B. = $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$



C15: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$	$\limsup \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right = \lim \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = \infty$ Not2 : (ii) den $Y.B. = \mathbb{R}$
C16: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)2^n} x^n$	$\limsup \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right = \lim \frac{n+1}{n} \frac{n^2-1}{(n+1)^2-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow R = \frac{1}{1/2} = 2$ $ x < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$ (i) $x = 2$ için $\sum \frac{n}{n^2-1}$ ıraksak $[b_n = \frac{1}{n}$ seç K.T (ii) uygula!] (ii) $x = -2$ için $\sum \frac{(-1)^n n}{n^2-1}$ yakınsak [Mutlak-Yak. değil, Alterne seri + Teo4(LeibnitzT.)] $\Rightarrow \text{(i) ve (ii) den } Y.B. = [-2, 2]$
C17: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^{3/2}-1)2^n} x^n$	Önceki soruyla benzer şekilde: $R = 2$, $Y.B. = [-2, 2]$
C18: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3n} (x-3)^n$	$\limsup \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right = \lim 3 \frac{3n}{3n+3} = 3 \Rightarrow R = \frac{1}{3}$ $ x-3 < 1/3 \Rightarrow \frac{8}{3} < x < \frac{10}{3}$ (i) $x = 10/3$ için $\sum \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum \frac{1}{n}$ ıraksak (ii) $x = 8/3$ için $\sum \frac{(-1)^n}{3n}$ yakınsak [Mutlak-Yak. + Teo3] $\Rightarrow \text{(i) ve (ii) den } Y.B. = \left[-\frac{8}{3}, \frac{10}{3} \right)$



$$T1(\text{Seri}) : (a_n) \text{ reel terimli dizi, } a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n}_{\text{genel terim}}$$

$$T2 \left(\begin{array}{l} \text{Kısmi.Top.} \\ \text{Dizisi} \end{array} \right) : \left. \begin{array}{l} s_1 = a_1 \\ s_2 = a_1 + a_2 \\ \vdots \\ s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ \vdots \end{array} \right\} \text{şeklindeki } (s_n) := \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \text{ dizisi.}$$

$$T3 \left(\begin{array}{l} \text{Serinin Karakteri} \\ \text{Yakınsaklık - Iraksaklık} \end{array} \right) : \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \Rightarrow \sum a_n \text{ yakınsak ve } \sum a_n = s .$$

$$(s_n) \text{ yakınsak, } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

$$(s_n) \text{ iraksak} \Rightarrow \sum a_n \text{ iraksak} .$$

$$Teo1 \left(\begin{array}{l} \text{Yakınsaklık için} \\ \text{bir gerek koşul} \end{array} \right) : \sum a_n \text{ yakınsak} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 .$$

$$\text{Sonuç1} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ iraksak} .$$

$$Teo2 : \left. \begin{array}{l} \sum a_n \text{ negatif-olmayan terimli} \\ \text{(yani her bir } a_n \geq 0) \text{ ve} \\ (s_n) \text{ üstten sınırlı} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum a_n \text{ yakınsak} .$$

$$\text{Not1} : (i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left\{ \begin{array}{l} p > 1 \text{ için yakınsak} \\ \text{diğer durumlar için iraksak} \end{array} \right.$$

$$\text{Ör: } \sum \frac{1}{n}, \sum \frac{1}{\sqrt{n}} : \text{iraksak},$$

$$\sum \frac{1}{n^2}, \sum \frac{1}{n^{3/2}} : \text{yakınsak}$$



$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} q^n \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < q < 1 \text{ için } \text{yakınsak} \\ \text{diğer durumlar için } \text{ıraksak} \end{array} \right.$$

Üstelik $0 < q < 1$ için (geometrik seri) **11/15**

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \cdot \text{Ör: } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3$$

Negatif-olmayan Terimli Serilerin Karakterlerini Belirlemede Kullanılan Testler:

$$\text{Kısaltmalar :} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K} : \text{Karakter, } \mathbf{K-T} : \text{Karşılaştırma Testi,} \\ \mathbf{D-T} : \text{D'Alambert Oran Testi, } \mathbf{C-T} : \text{Cauchy Kök Testi} \end{array} \right.$$

$\sum a_n$ K-T (i) $\sum b_n$ K ? (aradığımız), $\sum b_n$ K-bildiğimiz	$\left. \begin{array}{l} a_n \leq b_n \quad (\forall n > m) \\ \text{ve } \sum b_n : \text{yakınsak} \\ \text{ıraksak} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum a_n : \begin{array}{l} \text{yakınsak} \\ \text{ıraksak} \end{array}$
--	--

$\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ K-T (ii)	$\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \sum a_n, \sum b_n \text{ aynı karakterdedir.}$ $\left. \begin{array}{l} \ell = 0 \\ \text{ve } \sum b_n \text{ yakınsak} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum a_n \text{ yakınsak.}$ $\left. \begin{array}{l} \ell = \infty \\ \text{ve } \sum b_n \text{ ıraksak} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum a_n \text{ ıraksak.}$
--	---

$\sum a_n$ D-T (i) $\sum a_n$ K ?	$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \quad (\forall n > m) \Rightarrow \sum a_n : \begin{array}{l} \text{yakınsak} \\ \text{ıraksak} \end{array}$
---	--



D-T (ii) $\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$		$\ell < 1 \Rightarrow \sum a_n$ yakınsak $\ell > 1 \Rightarrow \sum a_n$ ıraksak $\ell = 1 \Rightarrow$ Test sonuç vermez!
--	--	--

C-T (i) $\sum a_n \text{ K ?}$		$\sqrt[n]{a_n} < 1 \quad (\forall n > m) \Rightarrow \sum a_n : \text{yakınsak}$ $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \quad (\forall n > m) \Rightarrow \sum a_n : \text{ıraksak}$
--	--	--

C-T (ii) $\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$		$\ell < 1 \Rightarrow \sum a_n$ yakınsak $\ell > 1 \Rightarrow \sum a_n$ ıraksak $\ell = 1 \Rightarrow$ Test sonuç vermez!
--	--	--

Ne zaman hangi testi kullanmalı? (Karar verme süreci-Sorular öncesi hazırlık)

Not: Bu gözlemler sonucunda, soruların çözümünü uzun uzadıya yazmadan.. pratik olarak 10 sn içinde doğru test kullanarak serilerin karakterlerini belirleyecek seviyeye gelmelisiniz!

D.T $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) : n!, q^n, n^\alpha$ vb. ifadelerde (ifadesine dikkat)	Ör: $\sum \frac{2^n n^2}{(2n)! 3^n}$,
---	---

C.T $\left(\sqrt[n]{a_n} = a_n^{1/n} \right) : n^n, q^n, n^\alpha$ vb. ifadelerde (ifadesine dikkat)	Ör: $\sum \frac{2^n}{n^{n^2}}, \sum \frac{1}{e^n}$
--	--

K.T: n^α (ve q^n) ifadelere özellikle dikkat! Bu testle ilgili sorularda daha çok, pay ve payda n^k lı ifadelerden oluşan sorularla karşılaşacağız! Şöyle bir şablon oluşturabilir: paydaki en yüksek dereceli ifade n^α , paydadaki en yüksek dereceli ifade n^β olsun, bu

S.İlter, <http://aves.istanbul.edu.tr/ilters>



durumda, $\beta - \alpha > 1$ ise seri yakınsak diğer durumlarda ıraksak olacaktır ($b_n = \frac{1}{n^{\beta-\alpha}}$ seç, K.T (ii) uygula ve gör!).

Ör: $\sum \frac{n}{(n+1)^2}$ ıraksak, $\sum \frac{n}{(n+1)^{5/2}}$ yakınsak, $\sum \frac{n+1}{n^3-1}$ yakınsak, $\sum \frac{\sqrt{n}+1}{n-1}$ ıraksak.

Not: Bazı sorularda bu testlerin birkaçını kullanarak kolaylıkla sonuca gitmek mümkün olabilir

$$\text{Ör: } \sum \frac{1}{2^n n} \text{ yakınsak } \left\{ \begin{array}{l} b_n = \frac{1}{2^n} \text{ seç K.T (ii) uygula!} \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{2(n+1)} \rightarrow \frac{1}{2}, \text{ D.T (ii) uygula!} \\ \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2n^{1/n}} \rightarrow \frac{1}{2}, \text{ C.T (ii) uygula!} \end{array} \right.$$

Negatif terim de içerebilen Seriler üzerine:

T4 (Mutlak - yakınsak) : $\sum |a_n|$ yakınsak $\Rightarrow \sum a_n$ mutlak-yakınsak

Teo3 : $\sum a_n$ mutlak-yakınsak $\Rightarrow \sum a_n$ yakınsak

T5 (Alterne Seri) : [terimleri (sıralı olarak) pozitif, negatif şeklinde devam eden seriler]

(u_n) negatif-olmayan terimli,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots$$

$$\text{Teo4 } \left(\begin{array}{l} \text{Alterne seriler için} \\ \text{yakınsaklık} \\ \text{Leibnitz testi} \end{array} \right) : \left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } (u_n) \text{ monoton azalan} \\ \text{(ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \text{ yakınsak.}$$



(A) Aşağıdaki serilerin karakterlerini (yakınsak olup olmadıklarını) belirleyiniz.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{2n-1}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{n}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}$

Yanıtlar - Yol Göstermeler

A1 ve A4: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ koşulu sağlanmaz $\Rightarrow \sum a_n$ ıraksak
Sonuç1 den

A2: $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$ ıraksak ($b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ seç K.T (ii) uygula!)

A3: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ yakınsak ($b_n = \frac{1}{n^3}$ seç K.T (ii) uygula!).

A5: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{n}}$ yakınsak $\left| b_n = \frac{1}{2^n} \right.$ seç K.T (ii) uygula!

A6: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}$ yakınsak $\left\{ \begin{array}{l} \sum |a_n| = \sum \frac{1}{n(n+2)} \text{ yakınsak} \\ (b_n = \frac{1}{n^2} \text{ seç K.T (ii) uygula!}) \Rightarrow \text{T4 den} \\ \sum a_n \text{ mutlak-yakınsak} \Rightarrow \sum a_n \text{ yakınsak} \end{array} \right.$
Teo3 den



$$T7(\text{Kuvvet Serisi}) : \sum a_n (x - x_0)^n$$

$$T8 \left(\begin{array}{c} \text{Yakınsaklık} \\ \text{Yarıçapı} \end{array} \right) : R = ? \quad \begin{array}{l} \nearrow R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \\ \searrow R = \frac{1}{\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} \end{array}$$

$$T9(\text{Yakınsaklık Bölgesi}) : Y.B. = \left\{ x \in \mathbb{R} : \underbrace{|x - x_0|}_{x_0 - R < x < x_0 + R} < R \right\}$$

Not2 : (i) Özel olarak uç noktalar ($x_0 - R$ ve $x_0 + R$) için yakınsaklık araştırması yapılır.

$$(ii) \quad \left\{ \begin{array}{l} R = 0 \Rightarrow Y.B. = \{ x \in \mathbb{R} : x = x_0 \} \\ R = \infty \Rightarrow Y.B. = \mathbb{R} \end{array} \right.$$

