

TOPOLOJİYE GİRİŞ ÖDEVLERİ (ARASINAWA KADAR)

A) Aşağıdakilerin geçerliliğini gösteriniz. ($A, B, C \subseteq X$)

$$1) A \Delta B = A \Leftrightarrow B = \emptyset$$

$$2) A \subseteq A \Delta B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

$$3) A = (A \Delta B) \cup (A \Delta C) \Rightarrow B \cap C = \emptyset$$

$$4) A \cap (B \Delta C) \subseteq A \Delta (B \cap C)$$

B) Aşağıdakilerin geçerliliğini gösteriniz.

$$1)]0, 1[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]0, 1 - \frac{1}{n} [= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$$

$$2) \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [n-1, n[= [0, +\infty[$$

$$3) [a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$$

$$4) \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [\frac{1}{n}, \infty[=]0, \infty[$$

c) Aşağıdakilerin geçerliliğini gösteriniz. ($f: X \rightarrow Y$,

$$1) f: (1-1) \Leftrightarrow \forall A, B \in P(X) \text{ iki } f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$$

$$2) \text{ " } \Leftrightarrow \forall A \subseteq X \text{ iki } f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A)$$

$$3) f: \text{ örnek } \Leftrightarrow \forall A \subseteq X \text{ iki } Y \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A)$$

$$4) \text{ " } \Leftrightarrow \forall B \subseteq Y \text{ iki } B = f f^{-1}(B)$$

- D)
- 1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ için A_n : sayılabilir sonsuz $\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ sayılabilir sonsudur, ispatlayınız.
 - 2) A sayılamsız sonsuz, $\forall n \in \mathbb{N}$ için B_n : sayılabilir sonsuz $\Rightarrow A \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n \right)$: sayılamsızdır, ispatlayınız
 - 3) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$ ols. $\text{card } A = ?$ $\text{card } (\mathbb{R} \setminus A) = ?$

E) Aşağıtaki topluluklar $X = \mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji midir?
Topoloji olanları gösterip, yanıtlarını ispatlayınız.

- 1) $T = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[a, \infty[: a \in \mathbb{R}\}$
- 2) $T = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$
- 3) $T = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$
- 4) $T = \{G \subseteq \mathbb{R} : \forall x \in G \exists \varepsilon > 0 \quad]x - \varepsilon, x] \subseteq G\} \cup \{\emptyset\}$
- 5) $T = \{A \subseteq \mathbb{R} : x_0 \notin A\} \cup \{\mathbb{R}\} \quad (x_0 \in \mathbb{R})$

H) Aşağıda bahsedilen topolojilerde ; yanlarında yazılı kümelerin iç ve kapasitelerini belirtelimiz (x₀ ∈ ℝ)

1) E3) deki topoloji (sol-ısn topolojisi) : $\{N, \mathbb{R} \setminus Q, \{x_0\}\}$
 $\{\emptyset, \mathbb{C}\}$

2) E4) " = : $\mathbb{Z}, Q, \{x_0\}, N$

3) E5) de özetlenen $x_0=0$ in belirlediği topoloji :
($x_0=0$ noktasıının belirlediği dislamsız noktası topolojisi)
 $\{\emptyset\}, (\mathbb{R} \setminus \{0\} \cap Q), \mathbb{Z}, (\mathbb{R} \setminus Q)$

4) $T = T_{\text{A-sayı}} = \{ A \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus A : \text{sayılabılır} \} \cup \{\emptyset\} :$
 $Q, \mathbb{R} \setminus Q, A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+ \right\}$

O.H. : olmak üzere

$d_A : \mathbb{R}$ nm absilms metriği yar $d_A(x,y) = |x-y|$

$$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

- F) 1) (X, d) m.u. olsun. Her tek nokta kimesi kapalıdır, ispatlayınız
- 2) " $B_\varepsilon[x] = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ kapalıdır, ispatlayınız.
- 3) (\mathbb{R}, d_A) uygunda $]-\infty, a[\cup]b, \infty[$ açıktr, ispatlayınız
- 4) " $= [a, b[\cup]a, b]$ kumesi açık mı? kapalı mı?
- 5) " $= \mathbb{N}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ " ve bu kümelerin içi ve kapansı belirleyiniz
- 6) (X, d) distrik metrik uyg ols. her $A \subseteq X$ kumesi hem açık hem de kapalıdır, ispatlayınız

- G) 1) (X, T) bir t.u. olsun.
- $B : T$ ian bir taban, $B^* \subseteq T$ ve $B \subseteq B^*$
 $\Rightarrow B^* : T$ ian bir taban olur mu?
- 2) "Eğer varsa bir topluluğu taban kabul eden topoloji bir tektir", ispatlayınız
- 3) $X = \{a, b, c, d, e\}$ ols. aşağıdaki tabanlar kabul eden X üzerinde bir topoloji belirlenebilir mi?
 (ayrı ayrı cevaplayınız) Belirlenebilir ise ilgili topoloji nasıl ediniz. ve bu topolojide a ian bir yarıl taban belirleyiniz

$$B_1 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a\}, \{d\}\}$$

$$B_2 = \{\text{--}, \text{--}, \text{--}, \{e\}\}$$

$$B_3 = \{\text{--}, \text{--}, \text{--}, \text{--}, \{c, d\}\}$$