

Kısmi Diferansiyel Denklemler / GAUSSA SORULARI 1

1) $F(x+y+u, 2xy-u^2) = 0$ ifadesini çözüm kabul eden KDD i bulunuz. Elde ettiğiniz denklemi sırflandırınız.

2) $U_{xyy} = e^{x-y}$, $u = u(x, y)$ Genel çözümünü bulunuz

3) $U_z + U_{xz} = U_{yy}$ $U(x, y, z)$ denklemini :

"Değişkenlere Ayırma Yöntemini" kullanarak önce A'di difer. denklemlere indirgeyiniz, daha sonra denklemlerdeki sabitlerin uygun değerleri için $U = e^{-x+az} \cdot g(y)$ formunda bütün çözümlerini belirleyiniz.

1) $F(x+y+u, 2xy-u^2) = 0$ ifadesini doğru kabul eden KDD?

$V = x+y+u, w = 2xy-u^2 ; F(V,w) = 0 \quad (P=U_x, q=U_y)$

$x-e$ ve $y-ye$ göre türevler :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} F_V \\ F_w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+P \\ 2y-2Uq \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} F_V \\ F_w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+q \\ 2x-2Uq \end{bmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1+P & 1+q \\ 2y-2Uq & 2x-2Uq \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Pp + Qq = R \\ P = 2x + 2U \\ Q = -2U - 2y \\ R = 2y - 2x \end{cases}$$

[Dikkat edilirse, denklem 3 kuazi-lineer dm.]

2) $U_{xyy} = e^{x-y}, U = U(x,y)$

Doğrudan integrasyon ile : $U_{xy} = e^x \int e^{-y} dy + F(x)$

$$\Rightarrow U_{xy} = -e^x e^{-y} + F(x) \quad \Rightarrow U_x = -e^x \int e^{-y} dy + F(x) \int dy + G(x)$$

y-ye göre integral

$$\Rightarrow U_x = e^x e^{-y} + F(x)y + G(x)$$

$$\Rightarrow U = e^{-y} \int e^x dx + y \int F(x) dx + \int G(x) dx + h(y)$$

$x-e$ göre integral

$$\Rightarrow \boxed{U(x,y) = e^{x-y} + y f(x) + g(x) + h(y)}$$

$f = \int F dx$
 $g = \int G dx$

3) $U_z + U_{xz} = U_{yy}$

$$U(x,y,z) = f(x)g(y)h(z) \Rightarrow f'gh' + f'gh' = fg''h$$

$\Rightarrow \frac{h'}{h} + \frac{f'}{f} \cdot \frac{h'}{h} = \frac{g''}{g}$ } bağımsız değişkenler sırt koşulu
olduğundan oranlar sabit olmalı

her terim fgh
bölüm.

$$\Rightarrow \left(\frac{f'}{f} = \frac{\alpha}{\text{sabit}} \right) \wedge \left(\frac{h'}{h} = \frac{\beta}{\text{sabit}} \right) \text{ yazalım}$$

$$\Rightarrow [f' - \alpha f = 0] \wedge [g'' - (\beta + \alpha\beta)g = 0] \wedge [h' - \beta h = 0]$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda - \alpha = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \alpha$$

e^{-x} çözümüne gelebiliriz için
 $\alpha = -1$ seçilmeli

$$\Downarrow$$

$$\lambda - \beta = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \beta$$

e^{az} çözümüne
gelebiliriz için
 $\beta = a$ seçilmeli

$$\Downarrow$$

$$\beta + \alpha\beta = 0 \text{ olacağına}$$

$$\Downarrow$$

$$\beta = 1$$

$$\Downarrow$$

$$g'' = 0$$

$$g' = c_1 \Rightarrow g(y) = c_1 y + c_2 \text{ olur}$$

$\Rightarrow$ istenilen kartezyen
bütün çözümler

$$: U(x,y,z) = e^{-x} \cdot e^{az} (c_1 y + c_2)$$