DİF. DENK. II (MATEMATİK BÖLÜMÜ) ÇALIŞMA SORULARI – 4 12.05.2015

A. Aşağıda verilen Denklem Genel Çözümlerini bulunuz.

<u>Soru 9 için</u>: sabitlerin değişimi yöntemi kullanılacak (özel çözümün bulunmasında)

Soru 11-12 için: önce sabit katsayılı denklem haline getirilip daha sonra çözümü bulunacak. (11 de: özel çözüm şablonundaki sabitler tespit edilmeden bırakılabilir)

1) $y'' - 2y' + 5y = \cos x$

2) $y''' + y'' = e^{-x} - 1$

3) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 3e^{4x}$

4) $y'' + y' - 2y = 3xe^{x}$

5) $y'' - 2y' + y = xe^{x} + x$

6) $y'' + y = x\cos x$

7) $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$

8) $y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{3x}$

9) $y''' - y' + 1 = 0$

10) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{1}{x^2 e^{2x}}$

11) $x^3 y''' - 6xy' + 12y - 1 = 0$

12) $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 7xy' - 8y = x^2(1 - \ln x)$

B. Aşağıdaki Denklem sistemlerini, yüksek mertebeden denklemlere indirgeyerek, çözümünü bulunuz.

Soru 3 için: Yalnızca yüksek mertebeden denklemlere indirgenmiş hali isteniyor, çözüm istenmiyor

1) $\dot{x} = x + 2y, \quad \dot{y} = x - 5\sin t$

2) $$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= z - y \\ \frac{dy}{dt} &= z \\ \frac{dz}{dt} &= z - x \end{aligned}\right\}$$

3) $$\begin{cases} 2\dot{x} + \dot{y} + x + y = t^2 + 4t \\ \dot{x} + \dot{y} + 2x + 2y = 2t^2 - 2t \end{cases}$$

Siteler: http://aves.istanbul.edu.tr/ilters

9) $y'' - 2y' + 5y = \cos x$

K.D. $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$

$\Rightarrow y_h = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

$y_p = A\cos x + B\sin x$ "$\pm i$" K.D. in kökü değil!

$y_p' = -A\sin x + B\cos x$, $y_p'' = -A\cos x - B\sin x$ olur

$$y_p'' - 2y_p' + 5y_p = (-A - 2B + 5A)\cos x + (-B + 2A + 5B)\sin x$$
$$= \cos x$$

$\Rightarrow 4A - 2B = 1$ ve $2A + 4B = 0$ bulunur

$\Rightarrow B = -\frac{1}{2}A$, $4A + A = 5A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{1}{10}$ bulunur

$\Rightarrow y_p = \frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{10}\sin x$ bulunur

$\Rightarrow$ genel çözüm: $\boxed{y = y_h + y_p = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{10}\sin x}$

$$y''' + y'' = e^{-x} - 1$$

K.D. $\lambda^3 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow y_h = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}$

$y_p = Axe^{-x} + Bx^2$ "0" K.D. in iki-katlı kökü

"−1" " kökü

$y_p' = e^{-x}(-Ax + A) + 2Bx$

$y_p'' = e^{-x}(Ax - A - A) + 2B = e^{-x}(Ax - 2A) + 2B$

$y_p''' = e^{-x}(-Ax + 2A + A) = e^{-x}(-Ax + 3A)$

$\Rightarrow y_p''' + y_p'' = e^{-x}(-Ax + 3A) +$

$e^{-x}(Ax - 2A) + 2B$

$= Ae^{-x} + 2B = e^{-x} - 1$

$\Rightarrow A = 1$ ve $B = -\frac{1}{2}$ bulunur

$\Rightarrow y_p = xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2$ bulunur

$\Rightarrow$ genel çözüm $\boxed{y = y_h + y_p = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2}$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 3e^{4x}$$

K.D. $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$\Rightarrow y_h = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x$

$y_p = Ae^{4x}$ "4" K.D. m kökü değil)

$y_p' = 4Ae^{4x}$, $y_p'' = 16Ae^{4x}$, $y_p''' = 64Ae^{4x}$

$$y_p''' - 3y_p'' + 3y_p' - y_p = e^{4x}(64A - 48A + 12A - A) = 27Ae^{4x}$$
$$= 3e^{4x}$$

$\Rightarrow A = \frac{1}{9}$ $\Rightarrow y_p = \frac{1}{9} e^{4x}$ bulunur

$\Rightarrow$ genel çözüm $\boxed{y = y_h + y_p = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x + \frac{1}{9} e^{4x}}$

1) $y'' + y' - 2y = 3xe^x$

K.D. $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -2$

$\Rightarrow y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$

$y_p = x(Ax+B)e^x$ "1" K.D.'nin kökü!

$= (Ax^2+Bx)e^x$

$y_p' = e^x(Ax^2+Bx+2Ax+B) = e^x[Ax^2+(2A+B)x+B]$

$y_p'' = e^x[Ax^2+(2A+B)x+B+2Ax+2A+B]$

$= e^x[Ax^2+(4A+B)x+2A+2B]$

$\Rightarrow y_p''+y_p'-2y_p = e^x[Ax^2+(4A+B)x+2A+2B] +$
$e^x[Ax^2+(2A+B)x+B] +$
$e^x[-2Ax^2-2Bx]$

$= e^x[6Ax+2A+3B] = 3xe^x$

$\Rightarrow 6A = 3$, $2A+3B=0$ $\Rightarrow$ $A=\frac{1}{2}$ ve $B=-\frac{1}{3}$ bulunur

$\Rightarrow y_p = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right)e^x$

$\Rightarrow$ genel çözüm $y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right)e^x$

$y'' - 2y' + y = xe^x + x$

K.D. $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$\Rightarrow y_h = (c_1 + c_2 x)e^x$

$y_p = x^2(Ax + B)e^x + Cx + D$

$= (Ax^3 + Bx^2)e^x + Cx + D$

"1" K.D in iki-katlı kökü !
"0" " kökü değil !

Sonuçta : $y_p = \frac{1}{6}x^3 e^x + x + 2$ bulunur (Ara işlemleri bi zahmet siz yapınız !)

$\Rightarrow$ genel çözüm $y = y_h + y_p = (c_1 + c_2 x)e^x + \frac{1}{6}x^3 e^x + x + 2$

(14) $y'' + y = x\cos x$

K.D. $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \mp i$

$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$y_p = x\left[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right]$

$= (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x$

"$\mp i$" K.D. nın kökü

Sonuçta : $y_p = \frac{x}{4}\cos x + \frac{x^2}{4}\sin x$ bulunur

$\Rightarrow$ genel çözüm $y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{4}\cos x + \frac{x^2}{4}\sin x$

$$y'' - 9y = e^{3x}\cos x$$

K.D. $\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -3$

$\Rightarrow y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$

$y_p = e^{3x}(A\cos x + B\sin x)$ "$3 \pm i$" K.D. in kökü değil

Sonuçta $y_p = e^{3x}\left(-\frac{1}{37}\cos x + \frac{6}{37}\sin x\right)$ bulunur

$\Rightarrow$ genel çözüm $y = y_h + y_p = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + e^{3x}\left(-\frac{1}{37}\cos x + \frac{6}{37}\sin x\right)$

bulunur

(18) $y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{3x}$

K.D. $\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 4$

$\Rightarrow y_h = c_1 e^{5x} + c_2 e^{4x}$

$y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$ "3" K.D. in kökü değil

Sonuçta $y_p = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right)e^{3x}$ bulunur

$\Rightarrow$ genel çözüm $y = y_h + y_p = c_1 e^{5x} + c_2 e^{4x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right)e^{3x}$

A9) $y''' - y' + 1 = 0$

Sabit katsayılı, lineer, homojen olmayan denk.

Homojen kısmın K.D.i : $\lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow y_h = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}$

Sabitlerin değişimi ; $c_1 = V_1(x)$, $c_2 = V_2(x)$, $c_3 = V_3(x)$

Derste verilen şablonu kullanalım

$$\left.\begin{aligned} V_1' + V_2' e^{x} + V_3' e^{-x} &= 0 \quad -(1) \\ V_2' e^{x} - V_3' e^{-x} &= 0 \quad -(2) \\ V_2' e^{x} + V_3' e^{-x} &= -1 \quad -(3) \end{aligned}\right\}$$

V_1', V_2', V_3' tespit edilmeli

(3)-(2) den : $V_3' = -\frac{1}{2}e^{x}$, (2) de yazılır ise $V_2' = -\frac{1}{2}e^{-x}$

(1) de yazılır ise : $V_1' = 1$

$\Rightarrow V_1 = x$, $V_2 = \frac{1}{2}e^{-x}$, $V_3 = -\frac{1}{2}e^{x}$ bulunur

İntegral işlem

$\Rightarrow y_ö = x + \frac{1}{2}e^{-x}.e^{x} + (-\frac{1}{2}e^{x}).e^{-x}$

$\Rightarrow y_ö = x$ bulunur

$\Rightarrow y = y_h + y_ö = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + x$ G.Ç.

(A10) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{1}{x^2 e^{2x}}$

Sabit katsayılı, lineer, homojen olmayan denk.

Homojen kısmın K.D.i : $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 = 0 \Rightarrow \cancel{\lambda_{1,2}}\ \lambda_1 = \lambda_2 = -2$

$\Rightarrow y_h = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$

Sabitlerin değişimi ; $c_1 = V_1(x)$, $c_2 = V_2(x)$

Derste verilen şablonu kullanalım :

$$\left.\begin{aligned} V_1' e^{-2x} + V_2' x e^{-2x} &= 0 \\ -2V_1' e^{-2x} + V_2'(-2x+1)e^{-2x} &= \frac{e^{-2x}}{x^2} \end{aligned}\right\}$$

V_1', V_2' tespit edilir ise ; (Ara işlemleri yapınız)

$V_1' = -\dfrac{1}{x} \Rightarrow V_1 = -\ln x$ (İntegral sabitleri sıfır alındı)

$V_2' = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow V_2 = -\dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow y_ö = -(1 + \ln x)e^{-2x}$ bulunur

$\Rightarrow y = y_h + y_ö = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} - (1 + \ln x)e^{-2x}$

NOT Cauchy-Euler Denk. $\Rightarrow$ lineer, değişken katsayılı denk olup, aşağıdaki dönüşüm ile sabit katsayılı hale getirilebildiğini biliyoruz.

$$\left.\begin{array}{l} x = e^t \\ (t = \ln x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \underbrace{\frac{dt}{dx}}_{=\frac{1}{x} = e^{-t}} = e^{-t} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad x y' = \dot{y} \qquad \left(\dot{y} = \frac{dy}{dt} \right)$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{zincir} \\ \text{kuralı}}}{y''} = \frac{d}{dt}\left(e^{-t} \cdot \frac{dy}{dt} \right) \cdot \underbrace{\frac{dt}{dx}}_{=e^{-t}} = \underbrace{e^{-2t}}_{=1/x^2} \left(\ddot{y} - \dot{y} \right)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}$$

$$y''' = \frac{d}{dt}\left[e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y}) \right] \cdot \underbrace{\frac{dt}{dx}}_{=e^{-t}} = \underbrace{e^{-3t}}_{=1/x^3} \left(\dddot{y} - \ddot{y} - 2\ddot{y} + 2\dot{y} \right)$$

$$\Rightarrow \quad x^3 y''' = \dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}$$

benzer şekilde, $x^4 y^{IV} = ?$ çıkarımını yapınız.

[Uğraştığınız sorularda, çıkarımları istediği taktirde yukarıdaki ~~daki~~ oraişlemleri yapmak zorundasınız, ezbere kullanma hakkınız OLMAYACAK!]

(A11)

$$x^3y''' - 6xy' + 12y - 1 = 0$$

Cauchy-Euler Denk. ; $x = e^t$ $(t = \ln x)$ dönüşümü yapılacak

NOT dan dönüşüm sonrası türevler :
$$\begin{cases} xy' = \dot{y} \\ x^2y'' = \ddot{y} - \dot{y} \\ x^3y = \dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y} \end{cases}$$
, denk.de yerine yazılır ise

$$\dddot{y} - 3\ddot{y} - 4\dot{y} + 12y = 1$$ (sabit katsayılı, lineer, homojen olmayan hale gelir)

Homojen kısmın K.D. : $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0$

[Dikkat: kökleri bulmak güç gibi gözüküyor. Bir kökü: denklemde yerine koyup deneme yanılma ile tespit edebilirsek diğer köklerin tespiti kolaylaşacaktır. $\lambda = 0, 1, -1, 2, -2$ kök olup olmadığına bakılır]

Dikkat edilirse $\lambda = 2$ K.D.'nin bir köküdür.

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 & \lambda - 2 \\ \hline -\ \lambda^3 - 2\lambda^2 & \lambda^2 - \lambda - 6 \\ -\lambda^2 - 4\lambda + 12 & \\ -\ -\lambda^2 + 2\lambda & \\ -6\lambda + 12 & \\ -\ -6\lambda + 12 & \\ 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0$

$\Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = 3$

$\Rightarrow y_h(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{3t}$

"0 K.D.'nin kökü değil" $\Rightarrow y_ö(t) = A$

denk.de yerine konulur ise $12A = 1 \Rightarrow A = 1/12$

$\Rightarrow y(t) = y_h(t) + y_ö(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{3t} + \frac{1}{12}$

$\Rightarrow$ ($t = \ln x$, $e^t = x$) $\boxed{y(x) = c_1x^2 + \frac{c_2}{x^2} + c_3x^3 + \frac{1}{12}}$ Genel çözüm

A12

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 7xy' - 8y = x^2(1-\ln x)$$

Cauchy-Euler Denk.i ; $x = e^t$ $(t = \ln x)$ dönüşümü yapılacak.

NOT den : dönüşüm sonrası türevler
$$\begin{cases} xy' = \dot{y} \\ x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y} \\ x^3 y''' = \dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y} \end{cases}$$
, denk.de yerine yazılır ise

$$\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y} - 3(\ddot{y} - \dot{y}) + 7\dot{y} - 8y = (1-t)e^{2t}$$

$$\Rightarrow \quad \dddot{y} - 6\ddot{y} + 12\dot{y} - 8y = (1-t)e^{2t}$$

(Sabit katsayılı hale gelir)

(Sabit katsayılı, lineer, homojen olmayan denklem)

Homojen kısmın K.D.i : $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda-2)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$$\Rightarrow \quad y_h(t) = (c_1 t^2 + c_2 t + c_3)e^{2t}$$

"2 KDM 3-katlı kökü" $\Rightarrow$ $y_ö(t) = t^3(At+B)e^{2t}$

(özel çözümün şablonu)

(Denk.de yerine konularak ; A ve B bulunabilir, ancak soruda tespiti istenmiyor)

$$\Rightarrow \quad y(t) = y_h(t) + y_ö(t)$$
$$= (c_1 t^2 + c_2 t + c_3)e^{2t} + t^3(At+B)e^{2t}$$

$\underset{\substack{t=\ln x \\ x=e^t}}{\Rightarrow}$ $\boxed{y(x) = x^2\left[c_1 \ln^2 x + c_2 \ln x + c_3\right] + x^2(\ln^3 x)(A\ln x + B)}$

B1) $\dot{x} = x + 2y$ (1) , $\dot{y} = x - 5\sin t$ (2)

(1) in t ye göre türevi : $\ddot{x} = \dot{x} + 2\dot{y} \underset{(2)\text{den}}{=} \dot{x} + 2x - 10\sin t$

$\Rightarrow \ddot{x} - \dot{x} - 2x = -10\sin t$

KD $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$

$x_h = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$, "$\mp i$ KD kökü değil" $x_ö = A\sin t + B\cos t$

denklemde yerine konursa $A = 3,\ B = -1$ bulunacaktır

$\ddot{x}_ö - \dot{x}_ö - 2x_ö = -A\sin t - B\cos t - A\cos t + B\sin t - 2A\sin t - 2B\cos t$

$= (-3A + B)\sin t + (-A - 3B)\cos t = -10\sin t$

$\Rightarrow -3A + B = -10$; $-A - 3B = 0$

$\Rightarrow$ $x = x_h + x_ö = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + 3\sin t - \cos t$

(1) den : $y = \dfrac{\dot{x} - x}{2} = \dfrac{1}{2}\left(-2c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + 4\cos t - 2\sin t\right)$

$= -c_1 e^{-t} + \dfrac{c_2}{2} e^{2t} + 2\cos t - \sin t$

(D2) $\dot{x} = z - y$ --(1)

$\dot{y} = z$ --(2)

$\dot{z} = z - x$ --(3)

(1) in türevini alalım $\Rightarrow \ddot{x} = \underbrace{\dot{z}}_{\underset{(3)\text{den}}{=z-x}} - \underbrace{\dot{y}}_{\underset{(2)\text{den}}{=z}} \Rightarrow \ddot{x} + x = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \mp i \Rightarrow x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

(3) de yerine yazıp z yi bulalım $\dot{z} - z = -c_1 \cos t - c_2 \sin t$

$\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow z_h = c_3 e^t$

" $\mp i$ kar. in kökü değil " $z_ö = A \cos t + B \sin t$

Denk. de yerine konulup A ve B bulunur; sonuç: $A = \frac{c_1 + c_2}{2}$, $B = \frac{c_2 - c_1}{2}$

$\Rightarrow z = z_h + z_ö = c_3 e^t + \frac{c_1 + c_2}{2} \cos t + \frac{c_2 - c_1}{2} \sin t$

(1) den y yi bulalım:

$y = z - \dot{x} = c_3 e^t + \frac{c_1 + c_2}{2} \cos t + \frac{c_2 - c_1}{2} \sin t + c_1 \sin t - c_2 \cos t$

$\underset{\text{düzenlenirse}}{\Rightarrow}$ $y = c_3 e^t + \left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right) \sin t + \frac{c_1 - c_2}{2} \cos t$

B3

$$2\dot{x} + \dot{y} + x + y = t^2 + 4t$$

$$\dot{x} + \dot{y} + 2x + 2y = 2t^2 - 2t$$

Operatör yöntemini kullanalım; $\frac{d}{dt} = D$, Denklem sistemi

$$\left.\begin{aligned} (2D+1)x + (D+1)y &= t^2+4t \\ (D+2)x + (D+2)y &= 2t^2-2t \end{aligned}\right\}$$

halini alır. Bu denk sistemini çözmeye çalışalım

$$W = \begin{vmatrix} 2D+1 & D+1 \\ D+2 & D+2 \end{vmatrix} = D^2+2D \quad ; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} t^2+4t & D+1 \\ 2t^2-2t & D+2 \end{vmatrix} = 8t+6$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2D+1 & t^2+4t \\ D+2 & 2t^2-2t \end{vmatrix} = -4t-8$$

$$\Rightarrow W.x = \Delta_1 \Rightarrow D^2x + 2Dx = 8t+6 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\dot{x} = 8t+6}$$

$$W.y = \Delta_2 \Rightarrow D^2y + 2Dy = -4t-8 \Rightarrow \boxed{\ddot{y} + 2\dot{y} = -4t-8}$$

Ş. İLTER