

A1-

$$y_1 = x^2 - x + 1, \quad y_2 = 2x^2 + x, \quad y_3 = 3x - 5$$

2/5

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & 2x^2 + x & 3x - 5 \\ 2x - 1 & 4x + 1 & 3 \\ \textcircled{2} & \textcircled{4} & \textcircled{0} \\ + & - & + \end{vmatrix} \rightarrow \text{Satınma göre açalım}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 2x^2 + x & 3x - 5 \\ 4x + 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & 3x - 5 \\ 2x - 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 6x^2 + 3x - (12x^2 - 20x + 3x - 5) = 3x^2 - 3x + 3 - (6x^2 - 10x - 3x + 5)$$

$$= 18x^2 + 20x + 5 = -3x^2 + 10x - 2$$

$$= 36x^2 + 40x + 10 + 12x^2 - 40x + 8 = 48x^2 + 18 \neq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{I})$$

$\Rightarrow y_1, y_2, y_3$: (aralanda) linear bağımsızdır
 $(W(x) \neq 0)$

A2 $y_1 = x^2 - x + 1, \quad y_2 = 2x^2 + x, \quad y_3 = 3x - 2$

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & 2x^2 + x & 3x - 2 \\ 2x - 1 & 4x + 1 & 3 \\ \textcircled{2} & \textcircled{4} & \textcircled{0} \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 2x^2 + x & 3x - 2 \\ 4x + 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & 3x - 2 \\ 2x - 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 6x^2 + 3x - (12x^2 - 8x + 3x - 2) = 3x^2 - 3x + 3 - (6x^2 - 4x + 3x + 2)$$

$$= -6x^2 + 8x + 2 = -3x^2 + 4x + 1$$

$$= -12x^2 + 16x + 4 + 12x^2 - 16x - 4 \equiv 0 \quad (\forall x \in \mathbb{I})$$

$\Rightarrow W(x) \equiv 0$ olduğum linear bağımlılık, linear bağımsızlık
 hakkında birsey diyemeyiz. Teoremi batalım :

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 =$$

$$= (\alpha_1 + 2\alpha_2) \underline{x^2} + (-\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3) \underline{x} + (\alpha_1 - 2\alpha_3) \cdot \underline{1} = 0$$

$$1, x, x^2 \text{ linear bağımsız} \quad \text{çünkü} \quad \det = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{... (*)} \\ \text{(3. bilinmeyenli 3 tane denk.)} \\ \text{lineer - homogen denk. sistemi} \end{matrix}$$

$$\text{kats. determinanı: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3(-2) - 2(-3) = 6 + 6 = 12 \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{Her iki tarafı sıfır olan: } \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$$

Söyleriz $\alpha_1 = \alpha_1''$, $\alpha_2 = \alpha_2''$, $\alpha_3 = \alpha_3''$ lar vardır

$$\Rightarrow y_1, y_2, y_3 : (\text{aralardan}) \text{ lineer bağımlıdır}$$

Söyleriz $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ değerleri bulunmak istiyoruz;

$$(*) \text{ den } \left(\alpha_2 = -\frac{1}{2}\alpha_1 \right) \cap \left(\alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_1 \right) : \alpha_1 = 2 \text{ seçelim}$$

$$\Downarrow \\ \alpha_1 = 2, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1$$

A3

4/5

$$y_1 = x, y_2 = e^x, y_3 = xe^x, y_4 = (2-3x)e^x$$

$$W[y_1, y_2, y_3, y_4] = \begin{vmatrix} +x & e^x & xe^x & (-3x+2)e^x \\ -1 & e^x & (x+1)e^x & (-3x-1)e^x \\ +0 & e^x & (x+2)e^x & (-3x-4)e^x \\ -0 & e^x & (x+3)e^x & (-3x-7)e^x \end{vmatrix}$$

$\equiv 0$ bulunacaktır (Ara islem biraz uzun)

$\Rightarrow$ lineer bağımsızlık - lineer bağımsızlık hakkında birsey söyleyemeyiz

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 y_4$$

$$\stackrel{!}{=} (\alpha_2 + 2\alpha_4) \underline{e^x} + (\alpha_3 - 3\alpha_4) \underline{xe^x} + \alpha_1 \underline{x} = 0$$

x, xe^x, e^x
parametreler

x, xe^x, e^x lineer bağımsız $\left[W[x, xe^x, e^x] \neq 0 \text{ olacaktır} \right]$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 - 3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{4 bilinmeyen 3 tane denk.} \\ \Downarrow \\ \text{3-bilinmeyen 3 tane denk. çözüm için} \\ \alpha_4 \neq 0 \text{ düşünelim} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_2 = -2\alpha_4 \\ \alpha_3 = 3\alpha_4 \\ \alpha_1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(*)} \\ \text{lineer-homogen olmayan denk. sistem için} \end{array}$$

$$\text{kats. determinat: } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{hepsi bulunan sist. olmayan: } \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 y_4 = 0$$

Söylenen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ler vardır

$$\Rightarrow y_1, y_2, y_3: \text{ lineer bağımsız}$$

$$[\text{Not (*) den } \alpha_1 = 0, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 3, \alpha_4 = 1 \text{ istenir}]$$

B. $(\sin x) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) y'' - e^x y' - y = \sqrt{2x+1}$

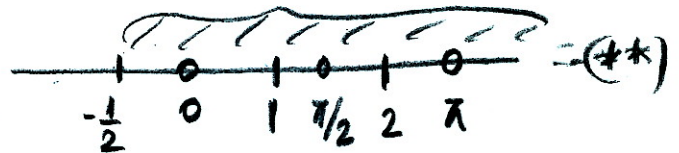
Denk: lineer, $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$

k1) $\left. \begin{aligned} a_2 &= (\sin x) \left(x - \frac{\pi}{2}\right), a_1 = -e^x \\ a_0 &= -1, g(x) = \sqrt{2x+1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \text{ üzerinde sürekli}$
 $\left[\text{ilgili özelliği sağlayan en geniş küme} \right]$

k2) " $a_2(x) = (\sin x) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \cup \{k\pi : k=0, \pm 1, \dots\}\right)$ "

$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq I \subseteq \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \cap \left[\mathbb{R} \setminus \left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \cup \{k\pi : k=0, \pm 1, \dots\}\right)\right] \quad (*)$

Özellikte bir I aratır belirlediği takdirde lineer denk aynı V-T. koşulları sağlanacak iştir.

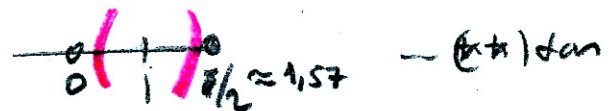


$(x_0 = 0) \vee (x_0 = \frac{\pi}{2})$ iken V-T. koşulları sağlanmayacaktır. Çünkü " x_0 da (k2) bölünmüyor" ve " x_0 in her civarı x_0 i içereceğinden"

(*) sağlanacak şekilde bir I belirlenmez!

Dolayısıyla bu noktada çözümün varlık-tekliği hakkında birsey söyleyemeyiz!

$x_0 = 1$ iken $I = (0.1, 1.3)$



$x_0 = 2$ iken $I = (1.8, 2.1)$



$x_0 = -\frac{2}{5}$ iken $I = (-0.5, 0.4)$



Seçilirse (*) sağlanır. Dolayısıyla bu noktada aynı ilgili başlangıç koşulları sağlayan çözüm var ve bir tane!