

İ.Ü.Fen Fakültesi Matematik Bölümü 29.12.2014
Diferansiyel Denklemler I (i.ö.) / Final Soruları

Yrd.Doç.Dr.Serkan İLTER / İ.Ü. Matematik
Süre: **70'** BAŞARILAR..

Ad-Soyad:

Numara:

İmza:

SORU 1. (30p) $\sqrt{-x}y' = e^{\sqrt{y+1}}$ denkleminin aşağıda verilen başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerinin varlığı ve tekliğini (her bir şık için ayrı ayrı) araştırınız. “ $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ noktası: denklemin integral eğrilerinin zarfı üzerinde bir nokta olabilir mi? tek cümleyle açıklayınız”.

(a) $y(-1) = -\frac{2}{3}$ (b) $y(0) = 1$

Açıklamalar: “yöntem olarak: yalnızca Varlık-Teklik Teoremleri kullanılmalı”; “Teoremlerin sonuç vermediği durumlar, bu durumda ne söylenebileceği ile birlikte açıklanmalı” ; “genel çözüm bulunmayacak, genel çözüm bulunarak yapılacak bütün gözlemler ve kısmi türevin yanlış hesaplanacağı tüm çözümler değerlendirme dışıdır.”

SORU 2. (30p) $y - \ln\left(\frac{1}{y'}\right) = xy'$ denklemini verilsin.

(a) denklemin genel çözümünü bulunuz.

(b) C-diskriminant eğrisini belirleyiniz, integral eğrilerinin zarfı var mı? varsa bulunuz, sonuç olarak tekil çözüm hakkında ne söylenebilir? Açıklayınız.

Açıklamalar: “genel çözümün tespit ediliş aşamaları: çözümünüzde bulunmalı, herhangi bir formül kullanma hakkınız yok”.

SORU 3. (40p) Aşağıdaki A-B-C şıklarından yalnızca **iki tanesini seçerek** yapınız!

(A) π , $\arcsin x$ fonksiyonlarını çözüm kabul eden birinci mertebeden, birinci dereceden bir adi diferansiyel denklem örneği veriniz. Verdiğiniz örneğin genel çözümünü belirleyiniz.

(B) $x\sqrt{1-y'^2} = 2y'$ denkleminin genel çözümünü: $y' = \sin t$ parametrik yazımını kullanarak bulunuz.

(C) α ve β nın hangi değerleri için $y^{2\alpha-2\beta}dx + \frac{2x}{y}dy + (y\sqrt{x} + y^{2\alpha})(2xydy - y^2dx) = 0$

denklemini $y = \sqrt{z}$ dönüşümü (burada $z = z(x)$) yardımıyla bir Darboux diferansiyel denklem haline getirilebilir?

Açıklamalar: “B) için: soruda istenilenden farklı yöntemlerle çözüm denemeleri değerlendirme dışıdır, son halde çözüm parametrik halde bırakılmamalı, trigonometrik hamlelerle (ters trigonometrik fonks.ları kullanmayınız) genel çözüm elde edilmeli” ; “C) için: işlemsiz yanıtlar değerlendirme dışıdır.” **Not: Çıkışta Soru Kağıtları da Teslim Edilecek**

UYARI: Soru 3 de seçimli sorular dikkate alınmadan istenenden fazla soruya uğraşırsanız (cevap kağıdınızda, soruyla ilgili üzeri karalanmadan bulunan her yazım uğraş kabul edilecektir), ilgili sorunun puanlaması: her bir şık 40/3 puan şeklinde olacaktır

Ad-Soyad:

Numara:

İmza:

SORU 1. (30p) (a) $f(x, y) = (\sqrt{y+1}) \cos x$ fonksiyonunun aşağıdaki kümeler üzerinde (y -değişkenine göre) Lipschitz koşulunu sağlayıp sağlamadığını ayrı ayrı araştırınız,
 $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2\}$, $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq x \leq \pi, y \geq -1\}$.

(b) $y' = (\sqrt{y+1}) \cos x$, $y(0) = 1$ probleminin çözümü var ise; “çözümün tekliği hakkında ne söylenebilir? a) dan yararlanarak, tek cümle ile açıklayınız”, “ $(0, 1)$ noktası: denklemin integral eğrilerinin zarfı üzerinde bir nokta olabilir mi? yine tek cümleyle açıklayınız”.

Açıklamalar: a) için yalnızca Lipschitz koşulunun tanımından yararlanılacak, koşulunu sağlandığı sonucuna erişilir ise ilgili Lipschitz sabiti nasıl tespit edildiği açıklanmalı; “a) da herhangi bir yeter koşuldan yararlanılarak yapılan bütün gözlemler, b) de genel çözüm bulunarak yapılan bütün gözlemler: değerlendirme dışıdır”.

SORU 2. (20p) $xy' - 1 = y'^2 e^y$ denklemi ve bu denklemin genel çözümü $x = c + \frac{e^y}{c}$ verilsin.

İntegral eğrilerinin zarfı var mı? varsa bulunuz, sonuç olarak tekil çözüm hakkında ne söylenebilir? Açıklayınız.

Açıklamalar: Türev hesabıyla ilgili hata yaparsanız, bu sorudan puan beklemeyiniz.

SORU 3. (50p) Aşağıdaki A-B-C şıklarından yalnızca **iki tanesini seçerek** yapınız!

(A) $y\sqrt{y'^2 - 1} = 2$ denkleminin genel çözümünü: $y' = \cosh t$ parametrik yazımını kullanarak bulunuz. Bu çözümden yararlanarak, varsa C-diskriminant eğrisini belirleyiniz.

(B) $x(xdy - ydx) = y^2 \ln x dx$ denkleminin çözümünü bulunuz.

(C) 0 , -1 , $\frac{1}{x}$ fonksiyonlarını çözüm kabul eden bir Bernoulli diferansiyel denklemi belirleyiniz.

Açıklamalar: A) için: “istenilenden farklı yöntemlerle çözüm denemeleri değerlendirme dışıdır, son halde çözüm parametrik halde bırakılmamalı, hiperbolik fonksiyonlarla ilgili hamlelerle (ters hiperbolik fonks.ları kullanmayınız) genel çözüm elde edilmeli”; B) için: çözüm yöntemi olarak: “Tam dif.denk”. ve “integrasyon çarpanı belirleyerek Tam dif. hale getirme” sınıflandırma ve yöntemleri kullanılmayacak, bu şekildeki bütün gözlemler değerlendirme dışıdır. “C) için bir yol gösterme: bir Riccati dif. denk. belirlemeye çalışarak işe başlayabilirsiniz”.

Not: Çıkışta Soru Kağıtları da Teslim Edilecek

UYARI: Soru 3de seçimli sorular dikkate alınmadan istenenden fazla soruya uğraşırsanız (cevap kağıdınızda, soruyla ilgili üzeri karalanmadan bulunan her yazım uğraş kabul edilecektir), ilgili sorunun puanlaması: her bir şık 50/3 puan şeklinde olacaktır. Çözümlerinizi yüksek puan almayı hedefliyorsanız: cevaplarınızın gerekçeleri ile birlikte doğru olması gerekliliğini unutmayınız (özellikle Soru 1 için).