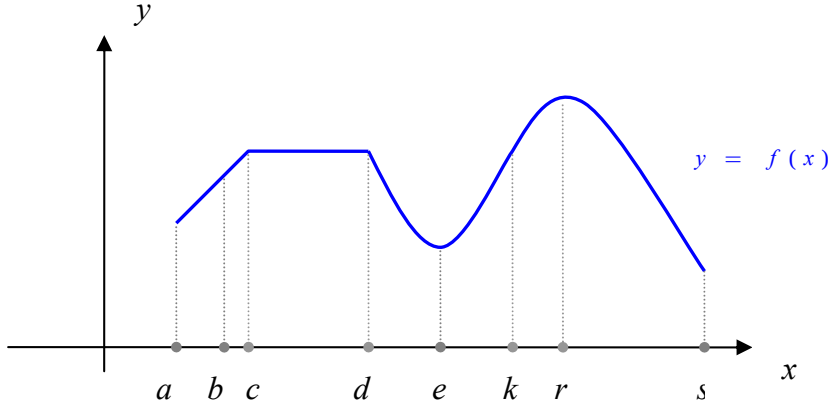


Analiz II

Çalışma Soruları-3

Son güncelleme: 14.04.2011

(I) (A) Aşağıdaki fonksiyon için verilen noktaların ekstremum nokta olup olmadıklarının gözlemini yapınız.



(B) Aşağıdaki fonksiyonların varsa ekstremum noktalarını bulunuz.

1. $f(x) = 2x + 1$

4. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

2. $f(x) = x^2 - 4x + 6$

5. $f(x) = 2x^2 - 5x + x \ln x$

3. $f(x) = x^3 - 27x + 10$

6. $f(x) = x \ln x$

(C) Aşağıdaki fonksiyonların ekstremum noktalarını araştırarak verilen aralıklarda varsa maksimum-minimum değerlerini bulunuz.

1. $f(x) = e^x, [0, 1]$

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 & , -1 \leq x < 0 \\ 2 - x^2 & , 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

2. $f(x) = \sqrt{1-x}, [-1, 1]$

5. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2, [-1, 4]$

3. $f(x) = \begin{cases} 1-x & , 0 \leq x < 1 \\ 2x-4 & , 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

6. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, [0, 2]$

(II) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

1. $f(x) = x^4 - 8x^2$

5. $f(x) = x - \frac{1}{x}$

2. $f(x) = x^4 - 6x^2$

6. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

3. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$

7. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

4. $f(x) = x^2 - x + 12$

Not: Yanıtlar-Yol göstermeler kontrol amaçlıdır, yazım hatası - eksiklikler vs.. olabilir..

kendi çözümlerinizi mutlaka karşılaştırınız..

Çalışma Soruları-3 (son güncelleme : 14.04.2011)

Yanıtlar - Yol Göstermeler I

Önbilgi 1. $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $x_0 \in D$ noktası, $U : x_0$ in bir civarı ($U \subseteq D$) verilsin. EN: Yerel Ekstreum (maksimum-minimum) nokta, KN: Kritik nokta, y: Yerel, m:Mutlak.

x_0 **y.minimum** : “ $\forall x \in U$ için $f(x) \geq f(x_0)$ ”

x_0 **y.maksimum** : “ $\forall x \in U$ için $f(x) \leq f(x_0)$ ”

Not 1: Yukarıdaki tanımlarda U yerine D alınırsa sırasıyla **m.minimum-m.maksimum** tanımları elde edilir. Başka ifade ile **m.maksimum (m.minimum): y.maksimum** noktalarının **en büyüğü(en küçüğü)**dür.

(KN.ların tespiti) KN.lar: $f'(x_0) = 0$ şeklindeki x_0 noktaları.

(EN için bir gerek koşul) x_0 EN $\Rightarrow x_0$ KN.

Not 2: Bu sonuç türevin varlığı hipotezi altında geçerlidir. O halde x_0 da türev var ve x_0 KN değil ise x_0 EN değildir.

(KN.larda EN araştırması) x_0 KN olsun.

(i) (Birinci Türevin işaretinin incelenmesi)

x	x_0	
$f'(x)$	+	-
$f(x)$		
y.m a k s i m u m		

x	x_0	
$f'(x)$	-	+
$f(x)$		
y . m i n i m u m		

Not 3: Diğer durumlarda x_0 EN değildir diyebiliriz.

(ii) (İkinci Türev Testi) (EN için bir yeter koşul)

$$“f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ y.minimum}” , “f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ y.maksimum}”.$$

Not 4: Bu sonuç ikinci türevin varlığı hipotezi altında geçerlidir. Testin sonuç vermediği durumlar için x_0 EN değildir diyemeyiz.

A. c, d, r : y.maksimum; r : m.maksimum; e : y.minimum; s : m.minimum;
 a, b, k : EN değil.

B1. $f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2 \Rightarrow$ KN yok $\Rightarrow$ EN yok !
 Not 2 den

B2. $f(x) = x^2 - 4x + 6 \Rightarrow f'(x) = 2x - 4$, **KN :**
$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = 2x - 4 = 0 \\ \Downarrow \\ x = 2 \end{array} \right.$$

x	2	
$f'(x)$	—	+
$f(x)$		

y.m in im u m

B3. $f(x) = x^3 - 27x + 10 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 27$, **KN :**
$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = 3(x-3)(x+3) = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -3, x_2 = 3 \end{array} \right.$$

x	-3		3
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$			

y.m a ks im u m

y.m in im u m

B4. $f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, **KN :**
$$\begin{cases} f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -1, x_2 = 1 \end{cases}$$

x	-1		1
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$			
y.m a k s i m u m		y . m i n i m u m	

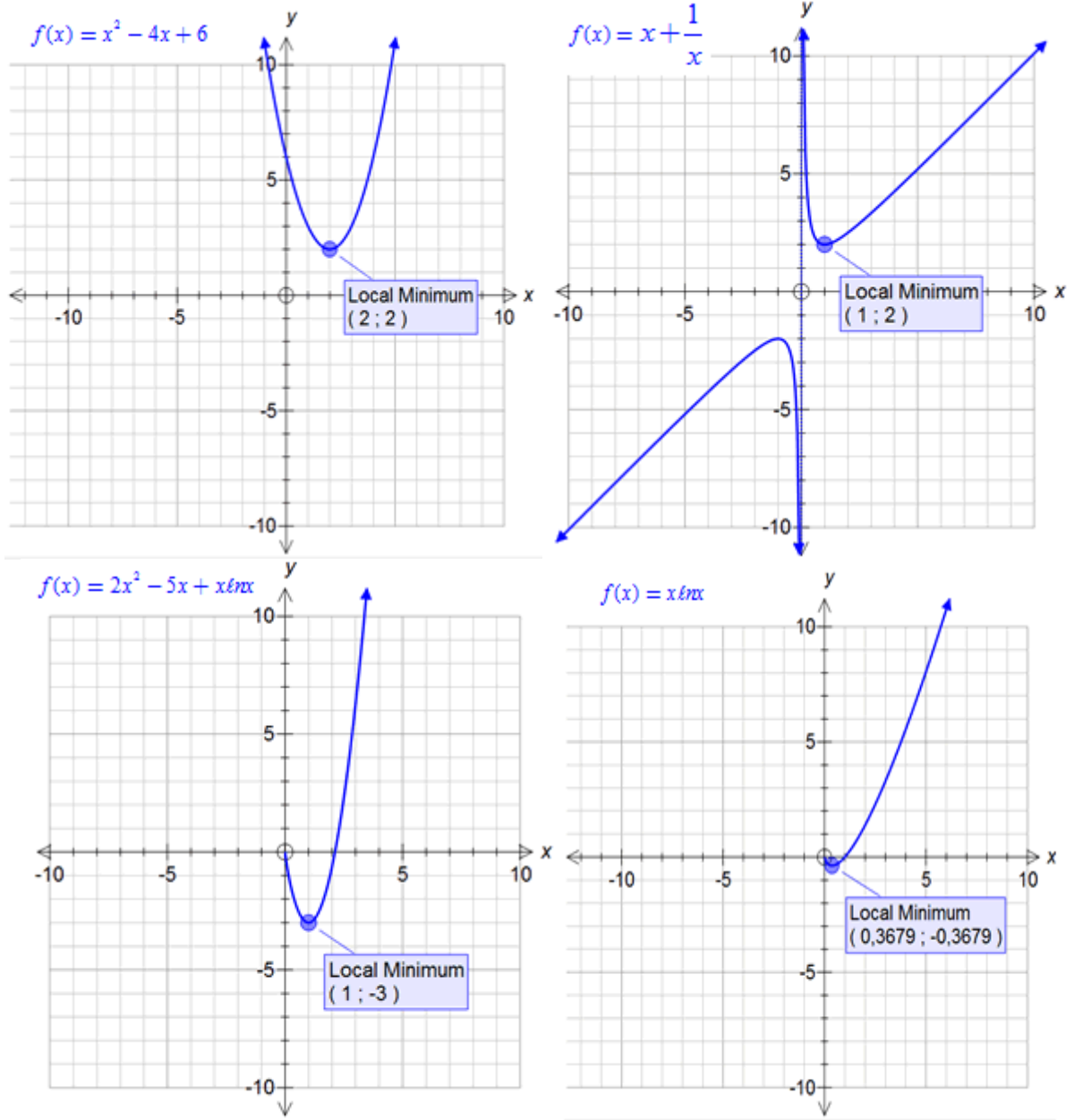
B5. $f(x) = 2x^2 - 5x + x \ln x \Rightarrow f'(x) = 4x - 4 + \ln x$, **KN :**
$$\begin{cases} f'(x) = 4x - 4 + \ln x = 0 \\ \Downarrow \\ x = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f''(x) = 4 + \frac{1}{x} \Rightarrow f''(1) = 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ y.minimum.}$
ikinci türev testinden

B6. $f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(x) = 1 + \ln x$, **KN :**
$$\begin{cases} f'(x) = 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \\ \Downarrow \\ x = \frac{1}{e} \end{cases}$$

$\Rightarrow f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{e} \text{ y.minimum.}$
ikinci türev testinden

Grafikler (gözlem için):



C1. $f(x) = e^x$, $[0, 1] \Rightarrow f'(x) = e^x \Rightarrow$ KN yok $\Rightarrow$ Aralığın iç noktalarında **EN**
Not 2 den

yok !. Uç noktaları inceleyelim: $f'(x) = e^x > 0 \Rightarrow f$ Artan $\Rightarrow x = 0$ m.minimum, $x = 1$ m.maksimum $\Rightarrow$ Minimum değer: $f(0) = 1$, Maksimum değer: $f(1) = e$.

C2. $f(x) = \sqrt{1-x}$, $[-1, 1] \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \Rightarrow$ KN yok $\Rightarrow$ Aralığın iç
Not 2 den

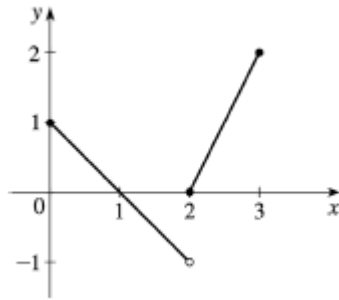
noktalarında **EN yok !**. Uç noktaları inceleyelim:

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} < 0 \Rightarrow f \text{ Azalan} \Rightarrow x=1 \text{ m.minimum, } x=-1 \text{ m.maksimum} \Rightarrow$$

Minimum değer: $f(1)=0$, Maksimum değer: $f(-1)=2$.

$$\text{C3. } f(x) = \begin{cases} 1-x & , 0 \leq x < 1 \\ 2x-4 & , 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Dikkat edilirse fonksiyon } x=2 \text{ de sürekli değildir}$$

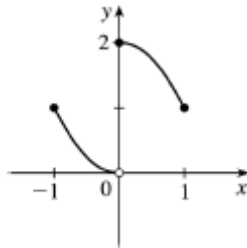
dolayısıyla bu noktada türevlenemez. Fonksiyonun grafiği üzerinde inceleme yapıp sonuca gidelim:



$x=2$ EN değil. Aralığın iç noktalarında EN yok. $x=3$ m.maksimum $\Rightarrow$ Maksimum değer: $f(3)=2$.

$$\text{C4. } f(x) = \begin{cases} x^2 & , -1 \leq x < 0 \\ 2-x^2 & , 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Dikkat edilirse fonksiyon } x=0 \text{ da sürekli değildir}$$

dolayısıyla bu noktada türevlenemez. Fonksiyonun grafiği üzerinde inceleme yapıp sonuca gidelim:



$x=0$ y.maksimum ve m.maksimum. Aralığın diğer iç noktalarında EN yok. $f(-1)=f(1)=1$
 $\Rightarrow$ Maksimum değer: $f(0)=2$.

$$\text{C5. } f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2, [-1, 4], \text{KN : } \begin{cases} f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3) = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = 1, x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow f''(1) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad x=1 \text{ y.minimum,}$$

ikinci türev testinden

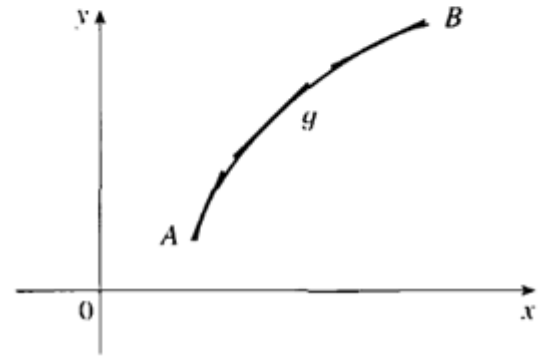
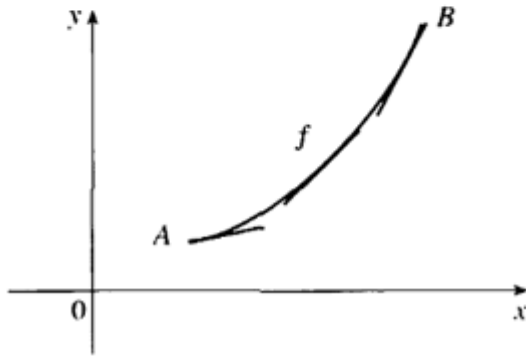
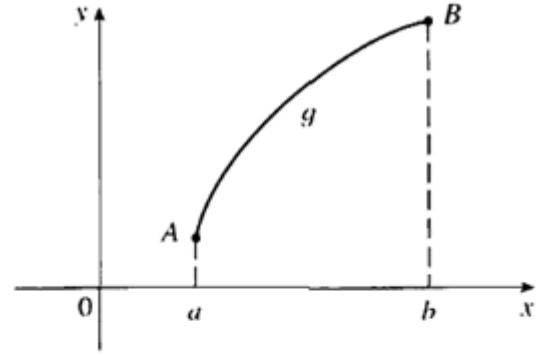
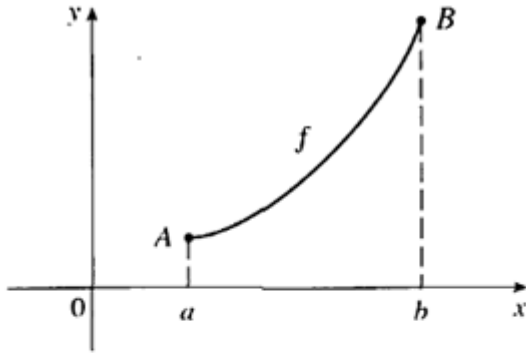
$$f''(3) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad x=3 \text{ y.minimum.}$$

ikinci türev testinden

$f(-1) = -14$, $f(1) = f(4) = 6$, $f(3) = 2 \Rightarrow$ Minimum değer: $f(-1) = -14$, Maksimum değer: $f(1) = f(4) = 6$.

C6. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, $[0, 2]$. Cevabı: Minimum değer: $f(0) = 0$, Maksimum değer: $f(1) = \frac{1}{2}$.

Önbilgi 2 (i) (konvekslik-konkavlık) Şekil üzerinde açıklayacağız.



bütün teğetler f in grafiğinin altında
konveks

bütün teğetler g nin grafiğinin üzerinde
konkav

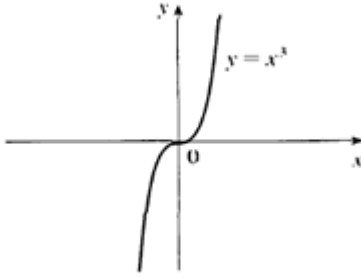
Not 5: (kabaca) Konveks: , Konkav: 

(ii) (f'' ile f in grafiği arasındaki ilişki) (Konvekslik Testi)

(ii)-T1. “ $\forall x \in I$ için $f''(x) > 0$ ” $\Rightarrow f : I$ da konveks.

(ii)-T2. “ $\forall x \in I$ için $f''(x) < 0$ ” $\Rightarrow f : I$ da konkav.

(iii) (**Büküm noktası**) Eğrinin konvekslikten konkavlığa (veya konkavlıktan konveksliğe) geçtiği noktaya Büküm (Dönüm-Eğer) noktası denilir. Ör:



$x = 0$ noktası büküm noktasıdır.

(iii) (**Asimptotlar:** fonksiyona sonsuzda teğet olan eğriler) Daha çok $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

şeklindeki rasyonel ifadelerde rastlanılır (p, q : polinom). Sorulara uygunluk açısından kabaca açıklama:

(**Düşey Asimptot:** paydayı sıfır yapan değerlerde) $f(a-)$, $f(a+)$ değerlerinden biri $-\infty$ diğeri $+\infty$ a eşit $\Rightarrow x = a$ f in bir D.Asimptotudur.

(**Yatay Asimptot:** $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ için limitlerde) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \in \mathbb{R} \Rightarrow y = b$ f in bir Y.Asimptotudur.

(**Eğri Asimptot:** payın derecesi paydanınkinden bir büyük)

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = n \in \mathbb{R} \Rightarrow y = mx + n$ f in bir E.Asimptotudur.

Örnekler: $f(x) = \frac{1}{x-1}$ fonksiyonu için $x = 1$ D.Asimptot, $y = 0$ Y.Asimptottur.

$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x}$ fonksiyonu için $y = x + 2$ E.Asimptottur.

(II) *Fonksiyon grafiklerinin çizimi ile ilgili sorularda, aşağıdaki aşamaları takip edeceğiz:*

- A. Fonksiyonun tanım kümesinin ve eksenleri kestiği noktaların belirlenmesi.
- B. Asimptotların belirlenmesi.
- C. Birinci ve İkinci türevlerin, EN.ların, Konveks-Konkav olduğu bölgelerin belirlenmesi.

1. $f(x) = x^4 - 8x^2$

A.
$$\left. \begin{array}{l} y = x^4 - 8x^2 = x^2(x^2 - 8) \\ x = 0 \text{ için } y = 0 \\ y = 0 \text{ için } x = -\sqrt{8}, x = \sqrt{8} \end{array} \right\} \Rightarrow (0,0), (-\sqrt{8},0), (\sqrt{8},0); \text{ T.K: } \mathbb{R}$$

B. Asimptot yok!

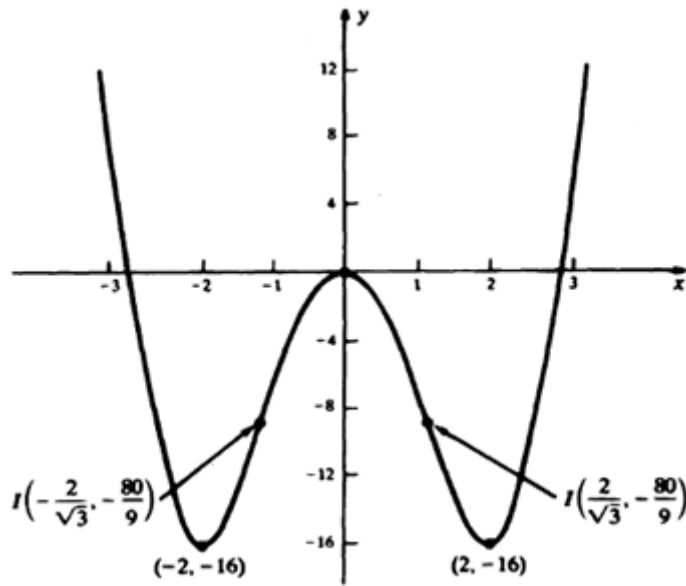
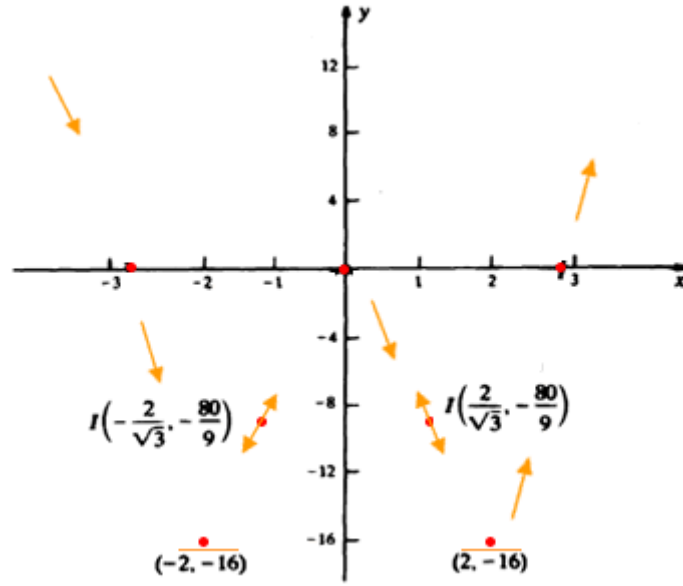
C. $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2)$,

$f''(x) = 12x^2 - 16 = 4(3x^2 - 4) = 12(x - \frac{2}{\sqrt{3}})(x + \frac{2}{\sqrt{3}})$

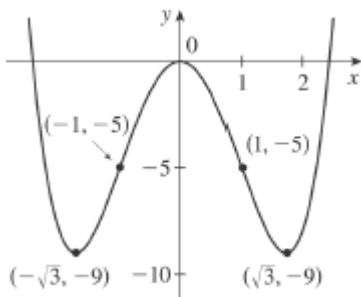
x	$-\infty$	-2	0	2	∞
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow \infty$
		-16	0	-16	
		y.m i n i m u m	y.m a k s i m u m	y.m i n i m u m	

x	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$f''(x)$	+	-	+
Konvekslik	konveks ∪	konkav ∩	konveks ∪
	$-\frac{80}{9}$		$-\frac{80}{9}$
	b ü k ü m n .		b ü k ü m n .

Çizime Hazırlık



2. $f(x) = x^4 - 6x^2$ benzer şekilde:



3. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}$

A. $\left. \begin{array}{l} y = \frac{x^2}{x^2 + 3} \\ x = 0 \text{ için } y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (0,0); \text{ T.K: } \mathbb{R}$

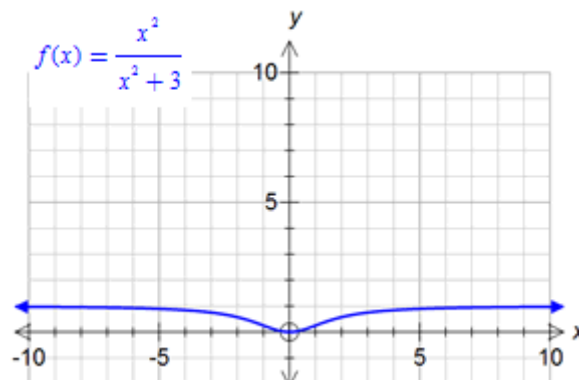
B. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 3} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ Y.Asimptot}$

C. $f'(x) = \frac{6x}{(x^2 + 3)^2}, f''(x) = -\frac{18(x+1)(x-1)}{(x^2 + 3)^3}$

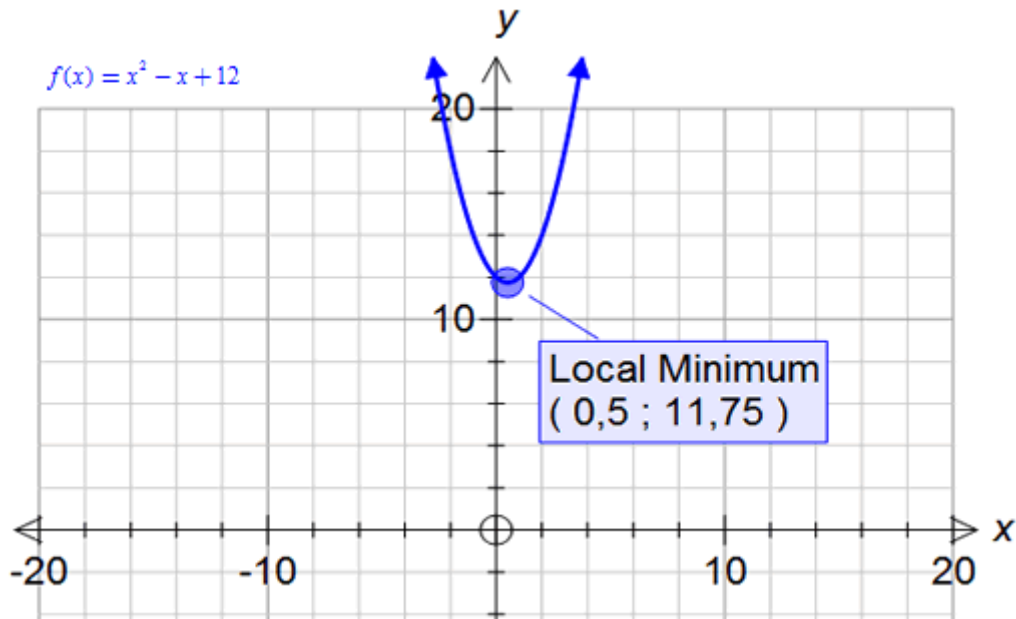
x	$-\infty$	0	∞
$f'(x)$	—	+	
$f(x)$	∞	$\nearrow$	∞

0
y.m i n i m u m

x	-1	1	
$f''(x)$	—	+	—
Konvekslik	konkav	konveks	konkav
			
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
	b ü k ü m n .	b ü k ü m n .	



4. $f(x) = x^2 - x + 12$ benzer şekilde:



5. $f(x) = x - \frac{1}{x}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{A. } y = \frac{x^2 - 1}{x^2} \\ x = 0 \text{ için } x = -1, x = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow (-1, 0), (1, 0); \text{ T.K: } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{B. } f(0-) = \lim_{x \rightarrow 0-} x - \frac{1}{x} = \infty \\ f(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} x - \frac{1}{x} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0 \text{ D.Asimptot}$$

$$\left. \begin{array}{l} m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{1}{x} - x \right) \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} = 0 (=n) \end{array} \right\} \Rightarrow y = mx + n \text{ yani } y = x \text{ E.Asimptot}$$

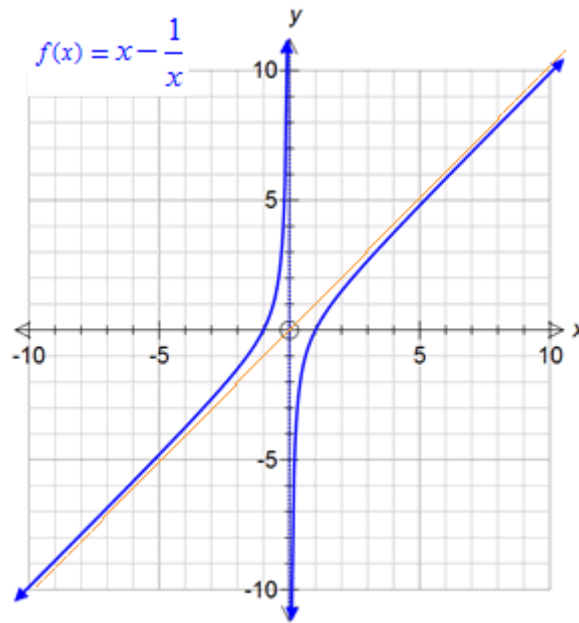
C. $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, $f''(x) = -\frac{2}{x^3}$

KN yok $\Rightarrow$ EN yok !
Not 2 den

x	$-\infty$	∞
$f'(x)$	+ + +	
$f(x)$	$-\infty$	∞

x	0	
$f''(x)$	+	-
Konvekslik	konveks ∪	konkav ∩

b ü k ü m n .



6. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

A. $y = \frac{x}{x-1}$
 $x=0$ için $y=0$ $\left. \vphantom{\frac{x}{x-1}} \right\} \Rightarrow (-1, 0), (1, 0); \text{T.K: } \mathbb{R} \setminus \{1\}$

B. $f(1-) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x}{x-1} = -\infty$
 $f(1+) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x}{x-1} = \infty$ $\left. \vphantom{\frac{x}{x-1}} \right\} \Rightarrow x=1 \text{ D.Asimptot}$

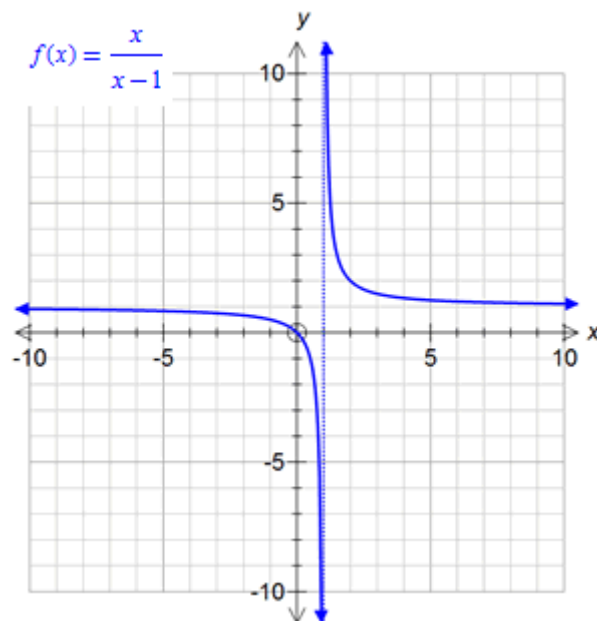
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 3} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ Y.Asimptot}$$

C. $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$, KN yok $\Rightarrow$ EN yok !
Not 2 den

x	$-\infty$	1	∞
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	1	$-\infty$	∞

x	1
$f''(x)$	$+$
Konvekslik	konveks

b ü k ü m n .



7. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ benzer şekilde ($x = -1, x = 1$ D.Asimptot; $y = 1$ Y.Asimptot; $x = 0$ y.maksimum):

