

Analiz II

Çalışma Soruları-2

Son güncelleme: 04.04.2011

(I) Aşağıdaki fonksiyonların (ilgili değişkenlere göre) türevlerini bulunuz.

1. $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2$

7. $2^{\cos \pi x}$

2. $\ln^2(\sqrt{\sin x})$

8. $\log_2(\sin \pi x)$

3. $e^{2 \tan \sqrt{x}}$

9. $3^{2^{\sqrt{x}}}$

4. $\sqrt{x - \sqrt{1 + \cot \sqrt{x}}}$

10. $\sec x$

5. $\sin(e^t) + e^{\sin t}$

11. $\arccos^3(\sqrt{e^x})$

6. $\cos(\tan x^2)$

(II) (A) (Bileşke fonksiyonun türevi)

1. $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \cos x \Rightarrow (f \circ g)'(x) = ?, (g \circ f)'(\frac{2}{\pi}) = ?$

2. $f(x) = x^2, g(x) = \ln x, h(x) = \sqrt{x}, k(x) = \sin x \Rightarrow (f \circ g \circ h \circ k)'(x) = ?,$

$(h \circ g)'(e) = ?$

(B) Aşağıda verilen f fonksiyonları için (türevlerin varlıklarının varsayımı altında)

f' leri, g' cinsinden ifade ediniz.

1. $f(x) = e^x g(x)$

3. $f(x) = g(x^3)$

2. $f(x) = g(g(x))$

4. $f(x) = (g(x))^3 + e^{g(x)}$

(C) Aşağıda verilen h fonksiyonları için (türevlerin varlıklarının varsayımı altında) h' leri, f' ve g' cinsinden ifade ediniz.

$$1. \quad h(x) = \frac{f(x)g(x)}{f(x) - g(x)}$$

$$3. \quad h(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$$

$$2. \quad h(x) = f(g(\sin x))$$

$$4. \quad h(x) = f\left(\sqrt{\frac{1}{g(x)}}\right)$$

(D) (Zincir kuralı, Parametreye bağlı fonksiyonlarda türev)

$$1. \quad \left. \begin{array}{l} y = 1 + \ln(x^2 + 1) \\ x = e^\theta + \theta \\ z = \cos^2 \theta \\ \theta = \arcsin t \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dy}{d\theta}(0) = ? , \frac{dy}{dt} = ? , \frac{dz}{dx} = ? , \frac{d^2z}{dx^2} = ?$$

$$2. \quad \left. \begin{array}{l} x = \sqrt{1-t} \\ y = \sqrt{1-\sqrt{t}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$$

(III) Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

$$1. \quad (\sqrt{x})^x$$

$$3. \quad 2^{x^x}$$

$$2. \quad x^{\cos x}$$

$$4. \quad x^{(\ln x)^x}$$

(IV) (A) Aşağıdaki fonksiyonların n . mertebeden türevlerini bulunuz.

$$1. \quad \sqrt{x}$$

$$4. \quad xe^x$$

$$2. \quad \cos x$$

$$5. \quad e^{-kx} \quad (k \text{ sabit})$$

$$3. \quad \ln(x-1)$$

$$6. \quad \sin 2x$$

(B) Leibniz Çarpım Kuralından yararlanarak $h(x) = e^{-x}x^2$ fonksiyonunun n . mertebeden türevini bulunuz.

(V) (A) Aşağıdaki fonksiyonlara $[0, 2]$ aralığında Ortalama Değer Teoremi uygulanabilir mi? inceleyiniz, uygulanabilirse Teoremden sözü geçen sabiti bulunuz.

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ 2x & , x > 1 \end{cases}$

2. $g(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ x & , x > 1 \end{cases}$

3. $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-2)^2} & , x \neq 2 \\ x & , x = 2 \end{cases}$

4. $h(x) = x^3 - x$

5. $\phi(x) = 2e^{-x}$

6. $\gamma(x) = \frac{x}{x+1}$.

(B) Aşağıdaki iddiaların doğru olduklarını gösteriniz (Ortalama Değer Teoreminden yararlanarak)

1. $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ için $\tan x > x$

2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$

3. $\forall x > 0$ için $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$

4. $\forall x > 0$ için $\ln(1+x) \leq x$.

(C) “ $f(0) = g(0)$ ” ve “ $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) \leq g'(x)$ ” koşullarını sağlayan türevlenebilen f ve g fonksiyonları verilsin. Bu durumda (Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoreminden yararlanarak) “ $\forall x \geq 0$ için $f(x) \leq g(x)$ ” olacağını gösteriniz.

(D) Aşağıdaki fonksiyonlara verilen aralıklarda Rolle Teoremi uygulanabilir mi? inceleyiniz, uygulanabilirse Teoremde sözü geçen sabiti bulunuz.

1. $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + 1$, $[-1, 1]$

2. $f(x) = x\sqrt{x+3}$, $[-3, 0]$

3. $f(x) = \sin 2\pi x$, $[-1, 1]$

(E) $4x^3 - 16x + 7 = 0$ denkleminin $(0,1)$ aralığında bir kökünün var olduğunu Rolle Teoreminden yararlanarak gösteriniz.

(F) Aşağıdaki fonksiyonların türevlerinden yararlanarak, Artan-Azalan oldukları aralıkları belirleyiniz.

1. $f(x) = 2x + 1$

4. $f(x) = x^3 - 27x + 10$

2. $f(x) = -x + 2$

5. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

3. $f(x) = x^2 - 4x + 6$

6. $f(x) = x - 2 \sin x$, $(0, 3\pi)$ de

Not: Yanıtlar-Yol göstermeler kontrol amaçlıdır, yazım hatası - eksiklikler vs.. olabilir..
kendi çözümlerinizi mutlaka karşılaştırınız..

Çalışma Soruları-2 (son güncelleme : 04.04.2011)

Yanıtlar - Yol Göstermeler I

$$1. \left(\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 \right)' = 2 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) \underbrace{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)'}_{= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}} = 2 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} \right).$$

$$2. \left(\ln^2(\sqrt{\sin x}) \right)' = 2 \left(\ln(\sqrt{\sin x}) \right) \underbrace{\left(\ln(\sqrt{\sin x}) \right)'}_{=:A} = (\cot x) \ln(\sqrt{\sin x})$$

$$A = \frac{(\sqrt{\sin x})'}{\sqrt{\sin x}} = \frac{(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}} = \frac{\cos x}{2\sin x} = \frac{1}{2} \cot x.$$

$$3. \left(e^{2 \tan \sqrt{x}} \right)' = 2 \underbrace{(\tan \sqrt{x})'}_{=:B} e^{2 \tan \sqrt{x}} = \frac{(1 + \tan^2 \sqrt{x}) e^{2 \tan \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$B = (1 + \tan^2 \sqrt{x}) (\sqrt{x})' = \frac{(1 + \tan^2 \sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$

$$4. \left(\sqrt{x - \sqrt{1 + \cot \sqrt{x}}} \right)' = \frac{1}{2(x - \sqrt{1 + \cot \sqrt{x}})} \underbrace{\left(x - \sqrt{1 + \cot \sqrt{x}} \right)'}_{=:C} = \frac{1}{2(x - \sqrt{1 + \cot \sqrt{x}})} \left(1 + \frac{1 + \cot^2 \sqrt{x}}{4\sqrt{x}(1 + \cot \sqrt{x})} \right)$$

$$C = 1 - \frac{(1 + \cot \sqrt{x})'}{2(1 + \cot \sqrt{x})} = 1 - \frac{-(1 + \cot^2 \sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2(1 + \cot \sqrt{x})} = 1 + \frac{1 + \cot^2 \sqrt{x}}{4\sqrt{x}(1 + \cot \sqrt{x})}.$$

5. $(\sin(e^t) + e^{\sin t})' = (\sin(e^t))' + (e^{\sin t})' = (e^t \cos(e^t)) + ((\cos t) e^{\sin t})$
6. $(\cos(\tan x^2))' = -(\sin(\tan x^2)) (\tan x^2)' = -2x (\sin(\tan x^2)) (1 + \tan^2 x^2).$
7. $(2^{\cos \pi x})' = (\cos \pi x)' 2^{\cos \pi x} \ln 2 = -\pi (\sin \pi x) 2^{\cos \pi x} \ln 2.$
8. $(\log_2 \sin \pi x)' = \frac{(\sin \pi x)'}{\sin \pi x} \log_2 e = \frac{\pi (\cos \pi x)}{\sin \pi x} \log_2 e = \pi (\cot \pi x) \log_2 e.$
9. $(3^{2^{\sqrt{x}}})' = (2^{\sqrt{x}})' 3^{2^{\sqrt{x}}} \ln 3 = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} 2^{\sqrt{x}} \ln 2 \right) 3^{2^{\sqrt{x}}} \ln 3.$
10. $(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x} \right)' = -\frac{1}{\cos^2 x} (\cos x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \sin x = \sec x \tan x.$
11. $(\arccos^3(\sqrt{e^x}))' = 3(\arccos^2 \sqrt{e^x}) (\arccos \sqrt{e^x})' = -\frac{3e^x (\arccos^2 \sqrt{e^x})}{2\sqrt{e^x(1-e^x)}}$

$$\stackrel{=:D}{=} -\frac{(\sqrt{e^x})'}{\sqrt{1-e^x}} = -\frac{\frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}}{\sqrt{1-e^x}} = -\frac{e^x}{2\sqrt{e^x(1-e^x)}}.$$

Yanıtlar - Yol Göstermeler II

Önbilgi 1. (Bileşke fonksiyonun türevi) $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) g'(x_0).$

A1. $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \cos x,$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x_0)) g'(x) = \underbrace{\left(-\frac{1}{\cos^2 x} \right) (-\sin x)}_{\text{dikkat: } g'(x) = -\sin x, f'(x) = -\frac{1}{x^2}} = \sec x \tan x.$$

Dikkat edilirse $(f \circ g)(x) = \sec x$ dir. Dolayısıyla buradaki türev işlemi Soru I-9 daki gibidir.

$$(g \circ f)' \left(\frac{2}{\pi} \right) = g' \left(f \left(\frac{2}{\pi} \right) \right) f' \left(\frac{2}{\pi} \right) = \underbrace{\left(-\sin \frac{\pi}{2} \right) \left(-\frac{1}{\left(\frac{2}{\pi} \right)^2} \right)}_{\text{dikkat: } f'(x) = -\frac{1}{x^2}, g'(x) = -\sin x} = (-1) \left(-\frac{\pi^2}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4} .$$

A2. $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = \sqrt{x}$, $k(x) = \sin x$,

$$(f \circ g \circ h \circ k)'(x) = f'((g \circ h \circ k)(x)) g'((h \circ k)(x)) h'(k(x)) k'(x) =$$

$$= \underbrace{(2 \ln \sqrt{\sin x}) \left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \right) (\cos x)}_{\text{dikkat: } k'(x) = \cos x, h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, g'(x) = \frac{1}{x}, f'(x) = 2x} = (\cot x) \ln(\sqrt{\sin x})$$

Dikkat edilirse $(f \circ g)(x) = \ln^2(\sqrt{\sin x})$ dir. Dolayısıyla buradaki türev işlemi Soru I-2 deki gibidir.

$$(h \circ g)'(e) = h'(g(e)) g'(e) = \underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{\ln e}} \right) \left(\frac{1}{e} \right)}_{\text{dikkat: } g'(x) = \frac{1}{x}, h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{1}{2e} .$$

B1. $f(x) = e^x g(x) \Rightarrow f'(x) = (e^x g(x))' \stackrel{\text{çarpımın türevinden}}{=} e^x g(x) + e^x g'(x) = e^x [g(x) + g'(x)] .$

B2. $f(x) = g(g(x)) \Rightarrow f'(x) = (g \circ g)'(x) \stackrel{\text{bileşke fonk. türevinden}}{=} g'(g(x)) g'(x) .$

B3. $f(x) = g(x^3) \Rightarrow f'(x) = (g \circ x^3)'(x) \stackrel{\text{bileşke fonk. türevinden}}{=} 3x^2 g'(x^3) .$

B4. $f(x) = (g(x))^3 + e^{g(x)} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((g(x))^3 + e^{g(x)} \right)' = \left((g(x))^3 \right)' + \left(e^{g(x)} \right)' = 3(g(x))^2 g'(x) + g'(x) e^{g(x)}. \\ &= g'(x) \left[3(g(x))^2 + e^{g(x)} \right]. \end{aligned}$$

C1. $h(x) = \frac{f(x)g(x)}{f(x)-g(x)} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{f(x)g(x)}{f(x)-g(x)} \right)' \stackrel{\text{bölümün türevinden}}{=} \frac{\left(f(x)g(x) \right)' (f(x)-g(x)) - (f(x)g(x)) (f(x)-g(x))'}{(f(x)-g(x))^2} \\ &= \frac{(f'(x)g(x) + f(x)g'(x))(f(x)-g(x)) - (f(x)g(x))(f'(x)-g'(x))}{(f(x)-g(x))^2}. \end{aligned}$$

C2. $h(x) = f(g(\sin x)) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(f(g(\sin x)) \right)' \stackrel{\text{bileşke fonk. türevinden}}{=} f'(g(\sin x)) g'(\sin x) (\sin x)' \\ &= (\cos x) f'(g(\sin x)) g'(\sin x). \end{aligned}$$

C3. $h(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}} \right)' = \frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'}{2\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}} = \frac{\left(\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \right)}{2\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{2g^2(x)\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}}. \end{aligned}$$

C4. $h(x) = f\left(\sqrt{\frac{1}{g(x)}}\right) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \left(f \left(\sqrt{\frac{1}{g(x)}} \right) \right)' = f' \left(\sqrt{\frac{1}{g(x)}} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{g(x)}} \right)' = f' \left(\sqrt{\frac{1}{g(x)}} \right) \frac{\left(\frac{1}{g(x)} \right)'}{2 \sqrt{\frac{1}{g(x)}}} \\
&= f' \left(\sqrt{\frac{1}{g(x)}} \right) \frac{\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)} \right)}{2 \sqrt{\frac{1}{g(x)}}} = -\frac{f' \left(\sqrt{\frac{1}{g(x)}} \right) g'(x)}{2 g^2(x) \sqrt{\frac{1}{g(x)}}}.
\end{aligned}$$

Önbilgi 2. (Zincir kuralı, Parametreye bağlı fonksiyonlarda türev)

$$\left. \begin{array}{l} x = f(u) \\ y = g(u) \\ u = h(s) \\ s = j(t) \end{array} \right\} \text{ verilsin. } \frac{dy}{dt} = ? , \frac{dy}{dx} = ?$$

$ \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{ds} \frac{ds}{dt} = \\ &= \frac{d}{du}(g(u)) \frac{d}{ds}(h(u)) \frac{d}{dt}(j(t)). \end{aligned} $	$ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \\ &= \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}} = \frac{\frac{d}{du}(g(u))}{\frac{d}{du}(f(u))}. \end{aligned} $
--	---

şeklinde bulunur.

$$\mathbf{D1.} \left. \begin{array}{l} y = 1 + \ln(x^2 + 1) \\ x = e^\theta + \theta \\ z = \cos^2 \theta \\ \theta = \arcsin t \end{array} \right\} \text{ veriliyor. Önbilgi-2 deki yöntemden yararlanacağız.}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{dx}(1 + \ln(x^2 + 1)) \frac{d}{d\theta}(e^\theta + \theta)$$

$$= \frac{2x}{x^2+1}(e^\theta+1) \underset{x=e^\theta+\theta \text{ idi.}}{\equiv} \frac{2(e^\theta+\theta)(e^\theta+1)}{(e^\theta+\theta)^2+1} \Rightarrow \frac{dy}{d\theta}(0) = \frac{2(e^0+0)(e^0+1)}{(e^0+0)^2+1} = 2.$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \underbrace{\frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\theta}}_{=\frac{dy}{d\theta}} \frac{d\theta}{dt} = \frac{2(e^\theta+\theta)(e^\theta+1)}{(e^\theta+\theta)^2+1} \frac{d}{dt}(\arcsin t) \\ &= \frac{2(e^\theta+\theta)(e^\theta+1)}{(e^\theta+\theta)^2+1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \underset{\theta=\arcsin t \text{ idi.}}{\equiv} \frac{2(e^{\arcsin t} + \arcsin t)(e^{\arcsin t} + 1)}{(e^{\arcsin t} + \arcsin t)^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}. \end{aligned}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{dz}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{d}{d\theta}(\cos^2 \theta)}{\frac{d}{d\theta}(e^\theta + \theta)} = \frac{-2\cos \theta \sin \theta}{e^\theta + 1} = -\frac{\sin 2\theta}{e^\theta + 1}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{-\sin 2\theta}{e^\theta + 1} \right) = \frac{\frac{d}{d\theta} \left(\frac{-\sin 2\theta}{e^\theta + 1} \right)}{\frac{dx}{d\theta}} \\ &= \frac{\frac{-2\cos 2\theta + (e^\theta + 1)\sin 2\theta}{(e^\theta + 1)^2}}{e^\theta + 1} = \frac{-2\cos 2\theta + (e^\theta + 1)\sin 2\theta}{(e^\theta + 1)^3}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{D2.} \quad \left. \begin{array}{l} x = \sqrt{1-t} \\ y = \sqrt{1-\sqrt{t}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(\sqrt{1-\sqrt{t}})}{\frac{d}{dt}(\sqrt{1-t})} = \frac{\frac{(1-\sqrt{t})'}{2\sqrt{1-\sqrt{t}}}}{\frac{-1}{2\sqrt{1-t}}} \underset{\text{türev işlemi yapıp düzenlenirse}}{\equiv} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-t}{t(1-\sqrt{t})}}.$$

Yanıtlar - Yol Göstermeler III

Önbilgi 3. $u = u(x)$, $v = v(x)$ olmak üzere, $(u^v)'$ = ?

$$y = u^v \text{ diyelim} \quad \Rightarrow \quad \ell n y = \ell n u^v = v \ell n u$$

her iki taraf için ℓn alalım

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = (v \ell n u)' = v' \ell n u + v (\ell n u)'$$

şimdi her iki tarafın türevini alalım

$$\Rightarrow y' = y \left(v' \ell n u + v (\ell n u)' \right)$$

$$\Rightarrow y' = u^v \left(v' \ell n u + v (\ell n u)' \right).$$

(*) Kısaca formülize edersek: $(u^v)' = u^v (v \ell n u)'$.

$$1. \quad \left((\sqrt{x})^x \right)' \underset{(*) \text{ dan}}{\equiv} (\sqrt{x})^x (x \ell n \sqrt{x})' = (\sqrt{x})^x \left(\ell n \sqrt{x} + \frac{x \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \right) = (\sqrt{x})^x \left(\frac{1}{2} + \ell n \sqrt{x} \right).$$

$$2. \quad \left(x^{\cos x} \right)' \underset{(*) \text{ dan}}{\equiv} x^{\cos x} (\cos x \ell n x)' = x^{\cos x} \left(-\sin x \ell n x + \frac{\cos x}{x} \right).$$

$$3. \quad \left(2^{x^x} \right)' = (\ell n 2) 2^{x^x} (x^x)' \underset{(*) \text{ dan}}{\equiv} (\ell n 2) 2^{x^x} (x^x (x \ell n x)') = (\ell n 2) 2^{x^x} x^x (1 + \ell n x)$$

4.

$$\begin{aligned}
\left(x^{(\ell n x)^x} \right)' &\stackrel{(*)}{=} x^{(\ell n x)^x} \left[(\ell n x)^x \ell n x \right]' = x^{(\ell n x)^x} \left[\underbrace{\left((\ell n x)^x \right)'}_{= (\ell n x)^x (x \ell n x)'} \ell n x + \frac{(\ell n x)^x}{x} \right] \\
&\stackrel{(*)}{=} x^{(\ell n x)^x} \left[(\ell n x)^x (1 + \ell n x) + \frac{(\ell n x)^x}{x} \right].
\end{aligned}$$

Yanıtlar - Yol Göstermeler IV

$$\mathbf{A1.} \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{2.2} \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \quad f'''(x) = \frac{1.3}{2.2.2} \frac{1}{\sqrt{x^5}}, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1.3.5 \dots (2n-3)}{2^n} \frac{1}{\sqrt{x^{2n-1}}}.$$

$$\mathbf{A2.} \quad \frac{d^n}{dx^n}(\cos x) = \cos \left(x + n \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\mathbf{A3.} \quad \frac{d^n}{dx^n}(\ell n(x-1)) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x-1)^n}.$$

$$\mathbf{A4.} \quad \frac{d^n}{dx^n}(xe^x) = e^x(x+n).$$

$$\mathbf{A5.} \quad \frac{d^n}{dx^n}(e^{-kx}) = (-1)^n k^n e^{-kx}.$$

$$\mathbf{A6.} \quad \frac{d^n}{dx^n}(\sin 2x) = 2^n \sin \left(2x + n \frac{\pi}{2} \right).$$

Önbilgi 4. Leibniz Çarpım Kuralı:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n)} &= f^{(n)} g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g' + \dots \\
&\quad + \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} + \dots + f g^{(n)} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.
\end{aligned}$$

B. $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = x^2$ diyelim $\Rightarrow h(x) = f(x) \cdot g(x)$ yani kısaca $h = f \cdot g$.

Şimdi n.mertebeden türevleri belirleyelim:

$$\begin{aligned}
f' &= -e^{-x}, \quad f'' = e^{-x}, \quad \dots, \quad f^{(n)} = (-1)^n e^{-x}, \\
g' &= 2x, \quad g'' = 2, \quad g''' = \dots = g^{(n)} = 0.
\end{aligned}$$

Şimd Leibniz Çarpım Kuralını uygulayalım, burada g nin 3.mertebe ve bu mertebeden daha büyük mertebeli türevlerinin sıfıra eşit olmasından ötürü toplam formülünde yalnızca g, g', g'' terimlerinin kullanıldığı ifadeler ile ilgileneceğiz:

$$\begin{aligned}
h^{(n)} &= (f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \\
&= f^{(n)} g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)} g'' + 0 \\
&= (-1)^n e^{-x} x^2 + n(-1)^{n-1} e^{-x} (2x) + \frac{n(n-1)}{2} (-1)^{n-2} e^{-x} (2) \\
&= (-1)^n e^{-x} (x^2 - 2nx + n(n-1)).
\end{aligned}$$

Yanıtlar - Yol Göstermeler V

Önbilgi 5. Bir $[a, b]$ aralığında tanımlı gerçel değerli f ve g fonksiyonları ve bu fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki koşulları göz önüne alalım:

(f - H1): $f : [a, b]$ kapalı aralığında SÜREKLİ.

(f - H2): $f : (a, b)$ açık aralığında TÜREVLENEBİLİR.

(f - H3): $f(a) = f(b)$.

Yazımda kolaylık olması açısından $(g-H1)$ ve $(g-H2)$ ile: sırasıyla, $(f-H1)$ ve $(f-H2)$ de f yerine g yazılması ile elde edilen koşullar kastediliyor olacak.

(i) (Rolle Toremi)

$$\left. \begin{array}{l} (f-H1), (f-H2) \text{ ve } (f-H3) \\ \text{koşulları geçerli olsun.} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b), f'(c) = 0.$$

(ii) (Ortalama Değer Teoremi- kısaca ODT)

$$\left. \begin{array}{l} (f-H1) \text{ ve } (f-H2) \\ \text{koşulları geçerli olsun.} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b), f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

(iii) (Genelletirilmiş Ortalama Değer Teoremi- kısaca GODT)

$$\left. \begin{array}{l} (f-H1), (f-H2), (g-H1), (g-H2) \\ \text{koşulları geçerli olsun.} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b), \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Not: Teoremda sağdaki rasyonel ifadenin paydasını daima sıfırdan farklı kılacak uygun koşulların da Teoremin hipotezlerine eklenildiği düşünülmektedir.

(iv) (Artanlık-Azalanlık ile ilgili Teoremler (yeter koşullar))

$(f-H2)$ geçerli olsun.

(iv)-T1. “ $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) > 0$ ” $\Rightarrow f : (a,b)$ de **(kesin) artandır.**

(iv)-T2. “ $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) < 0$ ” $\Rightarrow f : (a,b)$ de **(kesin) azalandır.**

A. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının $x_0 = 1$ de süreklilik ve türevlenebilirlik özelliklerini sağlayıp sağlamadıklarını Çalışma Sorusu 1- (V)(A) da incelemiştik. Bu sonuçlardan

yararlanacağız (Bu soruyu tekrardan inceleyiniz).

A1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ 2x & , x > 1 \end{cases}$ fonksiyonu $x_0 = 1$ de sürekli değildir. $1 \in [0, 2]$ olduğu için de

ODT nin hipotezlerinden **(f - H1)** koşulu sağlanmaz dolayısıyla f fonksiyonuna $[0, 2]$ de **ODT uygulanamaz.**

A2. $g(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ x & , x > 1 \end{cases}$ fonksiyonu $x_0 = 1$ de sürekli idi. Dolayısıyla fonksiyon $[0, 2]$ de

sürekli olacaktır ve ODT nin hipotezlerinden **(g - H1)** sağlanacaktır. Ancak fonksiyon $x_0 = 1$ de türevlenemediği ve $1 \in (0, 2)$ olduğu için ikinci hipotez **(g - H2)** sağlanmaz. Dolayısıyla g fonksiyonuna $[0, 2]$ de **ODT uygulanamaz.**

A3. $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-2)^2} & , x \neq 2 \\ x & , x = 2 \end{cases}$. Dikkat edilirse $\varphi(x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ de $x_0 = 2$

haricindeki noktalarda türevlenebilirdir. ODT nin hipotezlerinden **(φ - H2)** yani “ $\varphi : (0, 2)$ açık aralığında türevlenebilir” koşulu sağlanır. Ancak fonksiyon $x_0 = 2$ de sağdan sürekli olmadığı için (çünkü incelenirse $\varphi(2+) = \infty \neq 2 = \varphi(2)$), **(φ - H1)** yani “ $\varphi : [0, 2]$ kapalı aralığında sürekli” koşulu sağlanmaz. Dolayısıyla φ fonksiyonuna $[0, 2]$ de **ODT uygulanamaz.**

A4. $h(x) = x^3 - x$ bir polinom olduğundan $\mathbb{R}$ de sürekli ve türevlenebilirdir. Dolayısıyla ODT nin her iki hipotezi de sağlanır. Böylece h fonksiyonuna $[0, 2]$ de **ODT uygulanabilir.** Şimdi Teoremde sözü geçen sabiti bulalım:

$$\left. \begin{aligned} \exists c \in (0,2) , \ h'(c) &= \frac{h(2)-h(0)}{2-0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} h'(x) &= (x^3 - x)' = 3x^2 - 1 \\ \Rightarrow h'(c) &= 3c^2 - 1 \\ \Rightarrow \frac{h(2)-h(0)}{2-0} &= \frac{(2^3 - 2) - 0}{2} = 3 \\ \Rightarrow 3c^2 - 1 &= 3 \\ \Rightarrow c &= \pm \frac{2}{\sqrt{3}}. \\ \Rightarrow c \in (0,2) &\text{ olacağından aranan } c = \frac{2}{\sqrt{3}} \in (0,2) \end{aligned}$$

A5. $\phi(x) = 2e^{-x}$ bir polinom olduğundan $\mathbb{R}$ de türevlenebilirdir ($\phi'(x) = -2e^{-x}$) ve dolayısıyla sürekli. O halde ODT nin her iki hipotezi de sağlanır. Böylece ϕ fonksiyonuna $[0,2]$ de **ODT uygulanabilir**. Şimdi Teoremde sözü geçen sabiti bulalım.

$$\left. \begin{aligned} \exists c \in (0,2) , \ \phi'(c) &= \frac{\phi(2)-\phi(0)}{2-0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \phi'(x) &= -2e^{-x} \\ \Rightarrow \phi'(c) &= -2e^{-c} \\ \Rightarrow \frac{\phi(2)-\phi(0)}{2-0} &= \frac{2e^{-2} - 2}{2} = e^{-2} - 1 \\ \Rightarrow -2e^{-c} &= e^{-2} - 1 \Rightarrow e^{-c} = \frac{1 - e^{-2}}{2} \\ \Rightarrow c &= -\ln\left(\frac{1 - e^{-2}}{2}\right). \end{aligned}$$

A6. $\gamma(x) = \frac{x}{x+1}$ fonksiyonu $[0,2]$ de sürekli ve $(0,2)$ de türevlenebilirdir ($\gamma'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$). O halde ODT nin her iki hipotezi de sağlanır. Böylece ϕ fonksiyonuna $[0,2]$ de **ODT uygulanabilir**. Şimdi Teoremde sözü geçen sabiti bulalım.

$$\left. \begin{array}{l} \exists c \in (0, 2) , \\ \phi'(c) = \frac{\gamma(2) - \gamma(0)}{2 - 0} \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma'(c) = \frac{1}{(c+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma(2) - \gamma(0)}{2 - 0} = \frac{\frac{2}{3} - 0}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(c+1)^2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow c = -1 \pm \sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow c \in (0, 2) \text{ olacağından aranan } c = -1 + \sqrt{3} \in (0, 2) .$$

B1. “ $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ için $\tan x > x$ ”

I.yol: $f(x) := \tan x$ fonksiyonuna $[0, x]$ aralığında (burada $x < \frac{\pi}{2}$) ODT uygulayarak:

“fonksiyon $[0, x]$ de sürekli ve $f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ türevi $(0, x)$ de mevcut (yani türevlenebilir) olduğundan ODT uygulanabilir”.

$$\left. \begin{array}{l} \exists c \in (0, x) , \\ f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < c < x < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} = \frac{1}{\cos^2 c}$$

çünkü daima $\cos x \leq 1$
bu ve $0 < c < \frac{\pi}{2}$ özelliğinden
 $\cos^2 c < 1$

$$\Rightarrow \frac{\tan x}{x} > 1 \Rightarrow \tan x > x .$$

II.yol: $g(x) := (\tan x) - x$ fonksiyonun $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında artan olduğunu göstererek:

$$g'(x) = \tan^2 x \geq 0 \Rightarrow \text{Önbilgi 5-(iv)-T1 den istenilen elde edilir.}$$

$x < \frac{\pi}{2}$ için $\tan x \neq 0$ ve
gerçek bir sayının karesi
daima sıfırdan büyük olacağından

B2. “ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ ”

I.durum: “ $b > a$ olsun”. $f(x) := \sin x$ fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında ODT uygulayalım:

“ f fonksiyonu $\mathbb{R}$ de türevlenebilirdir ($f'(x) = \cos x$) dolayısıyla süreklidir (Böylece f in $[a, b]$ de süreklilik ve (a, b) de türevlenebilirlik özellikleri sağlanır) O halde bu fonksiyona $[a, b]$ de ODT uygulanabilir”.

$$\left. \begin{array}{l} \exists c \in (a, b), \\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(c) = \cos c, \\ \frac{f(a) - f(b)}{b - a} = \frac{\sin b - \sin a}{b - a} \\ \Rightarrow \cos c = \frac{\sin b - \sin a}{b - a} \\ \Rightarrow \sin b - \sin a = \underbrace{(\cos c)}_{(\text{daima}) \leq 1} (b - a) \leq b - a \\ \Rightarrow \sin b - \sin a \leq b - a. \end{array}$$

II.durum: “ $a > b$ olsun”. $\sin a - \sin b \leq a - b$ elde edilir (yukarıdaki sonuçta a ve b nin yeri değiştirilerek işlemler tekrarlanırsa bu sonucun elde edileceği açıktır).

II.durum: “ $a = b$ olsun”. $\sin a - \sin b = \sin a - \sin a = 0 = a - b = b - a$.

B3. “ $\forall x > 0$ için $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ ”

$f(x) := \sqrt{1+x}$ fonksiyonuna $[0, x]$ aralığında ODT uygulayalım:

“ f fonksiyonu $[0, x]$ de sürekli ve $(0, x)$ de türevlenebilirdir ($f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$) O halde bu fonksiyona $[0, x]$ de ODT uygulanabilir”.

$$\left. \begin{array}{l} \exists c \in (0, x) , \\ f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{1+c}},$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+c}} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{2(\sqrt{1+x} - 1)}{x} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+c}}_{(c \in (0, x) \text{ olduğundan daima})}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{2(\sqrt{1+x} - 1)}{x} < 1 \Rightarrow \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}.$$

B4. “ $\forall x > 0$ için $\ln(1+x) \leq x$ ”

$f(x) := \ln(1+x)$ fonksiyonuna $[0, x]$ aralığında ODT uygulayalım:

“ f fonksiyonu $[0, x]$ de sürekli ve $(0, x)$ de türevlenebilirdir ($f'(x) = \frac{1}{1+x}$) O halde bu fonksiyona $[0, x]$ de ODT uygulanabilir”.

$$\left. \begin{array}{l} \exists c \in (0, x) , \\ f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{1+c},$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{\underbrace{1+c}_{(c \in (0, x) \text{ olduğundan daima})}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 \Rightarrow \ln(1+x) < x.$$

C.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ ve } g \text{ türevlenebilir} \\ \text{(i)} f(0) = g(0) , \\ \text{(ii)} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \leq g'(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f, g \text{ fonksiyonuna } [0, x] \text{ aralığında} \\ \text{GODT uygulayalım.} \\ \text{"} f, g \text{ fonksiyonları türevlenebilir olduğundan} \\ [0, x] \text{ de sürekli ve } (0, x) \text{ de türevlenebilir olacaktır.} \\ \text{O halde GODT uygulanabilir "}$$

⇐

$$\exists c \in (0, x), \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)}$$

⇐

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} \stackrel{\text{(ii) den}}{\leq} 1 \Rightarrow f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0)$$

⇓ (i) den

$$f(x) \leq g(x)$$

D1. $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + 1$ fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığında sürekli; “ $f(-1) = f(1) = 2$ ”. O halde
Önbilgi 5(i) den Teoremin iki hipotezi ((f - H1) ve (f - H3)) sağlanır. Ancak $f'(x) = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$

($x \neq 0$) gözleminden fonksiyonun $x_0 = 0 \in [-1, 1]$ noktasında türevinin mevcut olmadığı anlaşılır. Dolayısıyla Teoremin diğer hipotezi (yani (f - H2)) geçerli olmaz. Böylece f fonksiyonuna $[-1, 1]$ de **Rolle Teoremi** uygulanamaz.

D2. $f(x) = x\sqrt{x+3}$ fonksiyonu $[-3, 0]$ aralığında sürekli; $(-3, 0)$ aralığında türevlenebilir“ ($f'(x) = \sqrt{x+3} + \frac{x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$) ; $f(-3) = f(0) = 0$ ” . O halde

Önbilgi 5(i) den Teoremin hipotezleri sağlanır. Böylece f fonksiyonuna $[-6, 0]$ da **Rolle Teoremi** uygulanabilir.

Şimdi Teoremden sözü geçen sabiti bulalım.

$$\left. \begin{array}{l} \exists c \in (-3, 0), f'(c) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(c) = \frac{3c+6}{2\sqrt{c+6}} = 0 \\ \Rightarrow c = -2.$$

D3. $f(x) = \sin 2\pi x$ fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığında sürekli (bunu durumu, $(\sin x) \circ (2\pi x)$ yazımından ve “sürekli fonksiyonların bileşke fonksiyonu da sürekli” gerçeğinden gözlemlemek mümkün); $(-1, 1)$ aralığında türevlenebilirdir“ ($f'(x) = 2\pi \cos 2\pi x$) ; $f(-1) = f(1) = 0$. O halde Önbilgi 5(i) den Teoremin hipotezleri sağlanır. Böylece f fonksiyonuna $[-1, 1]$ de **Rolle Teoremi** uygulanabilir. Şimdi Teoremden sözü geçen sabiti bulalım.

$$\left. \begin{array}{l} \exists c \in (-1, 1), f'(c) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(c) = 2\pi \cos 2\pi c = 0 \\ \Rightarrow \cos 2\pi c = 0 \Rightarrow c = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n . \\ \Rightarrow c \in (-1, 1) \text{ olacağından aranan } c \text{ ler :} \\ n = 0, n = \pm 1 \text{ için } \Rightarrow c = \frac{1}{4}, c = \pm \frac{3}{4} \in (-1, 1).$$

E. $f(x)$ fonksiyonunu türevi $4x^3 - 16x + 7$ olacak şekilde seçelim, $f(x) := x^4 - 8x^2 + 7x$.Bu fonksiyon $[0, 1]$ de sürekli ve $(0, 1)$ de türevlenebilirdir üstelik “ $f(0) = f(1) = 0$ ”O halde Önbilgi 5(i) den Teoremin hipotezleri sağlanır. Böylece f fonksiyonuna $[0, 1]$ de **Rolle Teoremi** uygulanabilir. Teoremden $\exists c \in (0, 1), f'(c) = 4c^3 - 16c + 7 = 0$.

F. Önbilgi 5-(iv) den yararlanacağız.

$$\textbf{F1. } f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2 > 0 \quad \stackrel{\text{(iv)-T1}}{\Rightarrow} f : \mathbb{R} \text{ de artandır.}$$

$$\textbf{F2. } f(x) = -x + 2 \Rightarrow f'(x) = -1 < 0 \quad \stackrel{\text{(iv)-T2}}{\Rightarrow} f : \mathbb{R} \text{ de azalandır.}$$

F3. $f(x) = x^2 - 4x + 6 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 2x - 4 < 0, \forall x \in (-\infty, -2) \\ f'(x) = 2x - 4 \geq 0, \forall x \in (2, \infty) \end{cases}$
 $\Rightarrow f: (-\infty, -2)$ de azalan; $(2, \infty)$ de artandır.

F4. $f(x) = x^3 - 27x + 10 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 27 = 3(x-3)(x+3)$

	$x < -3$	$-3 < x < 3$	$x > 3$
$f'(x)$ in işareti	+	-	+
$f(x)$	artan	azalan	artan

F5. $f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$1 - \frac{1}{x}$	+	+	-	+
$1 + \frac{1}{x}$	+	-	+	+
$f'(x)$ in işareti	+	-	-	+
$f(x)$	artan	azalan	azalan	artan

F6. $f(x) = x - 2\sin x \Rightarrow f'(x) = 1 - 2\cos x$

$$\begin{aligned} f'(x) = 1 - 2\cos x > 0 &\Leftrightarrow \cos x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3} \text{ veya } \frac{7\pi}{3} < x < 3\pi \\ f'(x) = 1 - 2\cos x < 0 &\Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ veya } \frac{5\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{3} . \end{aligned}$$

$\Downarrow$ (iv)-T1 ve T2 den

$$f: \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) \text{ ve } \left(\frac{7\pi}{3}, 3\pi\right) \text{ de artan ; } \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \text{ ve } \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right) \text{ de azalandır.}$$