Diferansiyel Denklemler I

Çalışma Soruları –1 18.10.2014

A. *Aşağıda istenilenleri elde ediniz!*

1. $A(1,-1)$ noktasından geçen ve herhangi bir noktasında teğetinin ordinat ekseninde ayırdığı parçanın uzunluğu, değme noktasının apsisine eşit olan eğriyi bulunuz. *(Not: oluşturduğunuz denklemdeki mutlak değeri göz ardı edebilirsiniz).*

2. $\ell ny = ax + by$ eğri ailesinin diferansiyel denklemini oluşturunuz.

B. *Aşağıda verilen denklemlerin; "hangi tip denklem olduklarını (nedenleri ile belirterek) belirleyiniz! "yanlarında koşul var ise, istenen koşulu sağlayan çözümünü", "koşul yok ise, tüm çözümlerini (genel çözüm ve varsa tekil çözümlerini) çözümün geçerli olduğu değişkenlerin tanım aralıklarını da vererek" bulunuz.*

1. $xy' = e^y + 2y'$

2. $(x-3y)dx + (2y-3x)dy = 0$

3. $y' = \dfrac{y}{x-\sqrt{xy}}$

4. $y' + (1-y^2)\tan x = 0$

5. $(x+2y+7)y' + 2x - y + 4 = 0$

6. $(x+y)^2 y' = 1$

7. $y' = x^2 e^{y-x^3}$, *i)* $y(0)=0$, *ii)* $y(+\infty)=0$

8. $y' = 4\sqrt{x-y+1}$

9. $\dfrac{x-xy'}{\cos(x-y)} = 1$, $y(1)=1$

10. $(x+y)dx + (3x+3y-1)dy = 0$

11. $(x+y)y' = x - y$

12. $y = 1 + \displaystyle\int_1^x \frac{t-y(t)}{t+y(t)}\,dt$

(önce bir dif.denk. problemine dönüştürünüz!)

13. $x^2y^2y' + xy^3 = -1$

Not: Çözümler-Yol göstermeler kontrol amaçlıdır, yazım hatası - eksiklikler vs.. olabilir.. *kendi çözümlerinizle mutlaka karşılaştırınız..*

Çözümler...

(son güncelleme : 17.10.2014)

A1.

....

Önbilgi:

$y = y(x)$ eğrisinin $M(x, y)$ noktasındaki Teğet Denklemi ((X,Y) teğet üzerindeki keyfi nokta) : $Y - y = y'(X - x)$

Teğetinin ordinat ekseninde ayırdığı parçanın uzunluğu denklemde $X = 0$ yazılarak (yani $Y = y - y'x$), x-ekseninde ayırdığı parçanın uzunluğu $Y = 0$ yazılarak (yani $X = x - \dfrac{y}{y'}$), bulunabilir. Ek olarak, "Teğet-altı uzunluğu: $\dfrac{y'}{y}$" ; "Teğet uzunluğu: $\sqrt{y^2 + \left(\dfrac{y'}{y}\right)^2}$" şeklinde bulunacaktır (*Şekil üzerinde gözlemleyiniz!*)

....

$\Rightarrow$ $Y = y - y'x$, bu da değme noktasının apsisine eşit olacak yani $Y = x$

$$\left.\begin{array}{l} Y = |y - y'x| \\ Y = x \end{array}\right\} \Rightarrow |y - y'x| = x \;\;,\; x > 0$$

$$\Rightarrow \; y' = \frac{y}{x} - 1 \;\; \text{(homojen denklem)}$$

$$\Rightarrow \; y = cx - x\ell n\, x \;\; \text{[Genel Çözüm]}$$ bulunacaktır (*İnceleyiniz!*)

$A(1,-1)$ noktasından geçtiğine göre:

$$\left.\begin{array}{c} y(1) = -1 \\ \text{yani } x = 1 \text{ için } y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{genel çözümden: } -1 = c - \ell n 1 \;\Rightarrow\; c = -1$$

O halde istenilen çözüm : $\boxed{y = -x(1 + \ell n\, x)}$

A2. Amacımız verilen eğri ailesini genel çözüm kabul eden dif. denk. i belirlemek olduğundan; eğri ailesinde iki keyfi sabit olması sebebiyle, "ikinci mertebe adi dif. denk." elde etmeye çalışacağız!

$$\ell ny = ax + by \qquad (i)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{x\text{-e göre türev}} \frac{y'}{y} = a + by' \qquad (ii)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{x\text{-e göre türev}} \frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y} = by'' \qquad (iii)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{(iii)\ den} b = \frac{1}{y} - \frac{y'^2}{y^2 y''}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{(ii)\ den} a = \frac{y'}{y} + by' = \frac{y'}{y} - \frac{y'}{y} + \frac{y'^3}{y^2 y''} = \frac{y'^3}{y^2 y''}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{(i)\ den} \ell ny = ax + by = \left(\frac{y'^3}{y^2 y''}\right)x + \left(\frac{1}{y} - \frac{y'^2}{y^2 y''}\right)y$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{her iki taraf } y^2 y'' \text{ ile çarpılırsa}} y^2 y'' \ell ny = xy'^3 + y^2 y'' - yy'^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \qquad y^2 y''(1 - \ell ny) = y'^2 (xy' - y)}$$

B1. **(Değişkenlerine Ayrılabilir denklem)**

$$xy' = e^y + 2y' \quad \Rightarrow \quad \int e^{-y}\, dy = \int \frac{1}{x-2}\, dx \quad , \ x \neq 2$$

$$\Rightarrow \quad -e^{-y} = \left(\ell n\left|x-2\right|\right) + c \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

$$I:\ x \neq 2$$

B2. **(Homojen denklem)**

$p\,dx + q\,dy = 0$ yazımından; $p(x,y) = x - 3y$, $q(x,y) = 2y - 3x$ fonksiyonları 1.mertebeden homojendirler (*gözlemleyiniz!*).

$$(x-3y)dx + (2y-3x)dy = 0 \ \Rightarrow \ y' = \frac{x-3y}{2y-3x} = \frac{1 - 3\left(\frac{y}{x}\right)}{2\left(\frac{y}{x}\right) - 3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y}{x}=u,\ y=xu\ ,\ u=u(x) \\ &y'=\frac{1-3u}{2u-3} \end{aligned}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{x\text{-e göre türev}} y'=u+xu'=\frac{1-3u}{2u-3}$$

$$\Rightarrow\ xu'=\frac{1-3u}{2u-3}-u$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{\int \frac{2u-3}{1-2u^2}\,du}_{=I_1}=\int \frac{1}{x}\,dx \qquad (x\neq 0,\ u^2\neq \frac{1}{2})$$

I_1 integralini hesaplayalım:

$$I_1=\underbrace{\int \frac{2u}{1-2u^2}\,du}_{=I_2}-3\underbrace{\int \frac{1}{1-2u^2}\,du}_{=I_3}$$

$$\Rightarrow\ I_2=-\frac{1}{2}\ell n\left|1-2u^2\right|+k_1$$

I_3 için $\dfrac{1}{1-2u^2}=\dfrac{1/2}{1-\sqrt{2}u}+\dfrac{1/2}{1+\sqrt{2}u}$ gözleminden,

$I_3=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ell n\left|\dfrac{1+\sqrt{2}u}{1-\sqrt{2}u}\right|+k_2$ olduğu kolayca görülür.

$$\Rightarrow\ I_1=I_2-3I_3=-\frac{1}{2}\ell n\left|1-2u^2\right|-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ell n\left|\frac{1+\sqrt{2}u}{1-\sqrt{2}u}\right|+k_1+k_2$$

$$\Rightarrow\ -\frac{1}{2}\ell n\left|1-2u^2\right|-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ell n\left|\frac{1+\sqrt{2}u}{1-\sqrt{2}u}\right|=\ell n|x|+\ell n|c|$$

$$\Rightarrow\qquad \left(1-2u^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\sqrt{2}u}{1-\sqrt{2}u}\right)^{-\frac{3}{2\sqrt{2}}}=cx$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{u=\frac{y}{x}\text{ idi}}\qquad \left(1-\frac{2y^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\sqrt{2}\,\frac{y}{x}}{1-\sqrt{2}\,\frac{y}{x}}\right)^{-\frac{3}{2\sqrt{2}}}=cx \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

$$I:\ x\neq 0,\ \ y\neq \mp\frac{1}{\sqrt{2}}x$$

$u^2=\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ için çözüm araştırması:

$\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$ bulunur, bu eğriler diferansiyel denklemi sağlar (*gözlemleyiniz!*) dolayısıyla denklemin bir çözümüdür. Genel çözüme dikkat edilirse, $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$ çözümünün denklemin bir *Özel-Çözümü* iken, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$ çözümünün denklemin bir *Tekil-Çözümü* olduğu görülür (*gözlemleyiniz!*).

B3. (Homojen denklem)

$p\,dx+q\,dy=0$ yazımından; $p(x,y)=-y$, $q(x,y)=x-\sqrt{xy}$ fonksiyonları 1.mertebeden homojendirler (*gözlemleyiniz!*). $y'=\dfrac{y}{x-\sqrt{xy}}=\dfrac{y/x}{1-\sqrt{y/x}}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y}{x}=u,\ y=xu\ ,\ u=u(x) \\[2ex] y'=\dfrac{u}{1-\sqrt{u}} \end{array}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{x\text{-e göre türev}} y'=u+xu'=\dfrac{u}{1-\sqrt{u}}$$

$$\Rightarrow\ xu'=\frac{u}{1-\sqrt{u}}-u$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{\int\frac{1-\sqrt{u}}{u\sqrt{u}}\,du}_{=I_1}=\int\frac{1}{x}\,dx \qquad (\,x\neq 0,\ u\neq 0\,)$$

I_1 integralini hesaplayalım:

$$I_1=\int\frac{1}{u\sqrt{u}}\,du-\int\frac{1}{u}\,du$$
$$=\int u^{-3/2}\,du-\int\frac{1}{u}\,du$$
$$=-\frac{2}{\sqrt{u}}-\ell n\,|u|+k_1$$

$$\Rightarrow\ -\frac{2}{\sqrt{u}}-\ell n\,|u|=\ell n\,|x|+\ell n\,|c|\ \Rightarrow\ -\frac{2}{\sqrt{u}}=\ell n\,|cxu|$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{u=\frac{y}{x}\text{ idi}}\qquad -\frac{2}{\sqrt{y/x}}=\ell n\,|cy| \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

$I:\ x\neq 0,\ y\neq 0$

$u=\dfrac{y}{x}=0 \;\Rightarrow\; y=0$ için çözüm araştırması:

$y=0$ diferansiyel denklemi sağlar ($x\neq 0$) (*gözlemleyiniz!*) dolayısıyla denklemin bir çözümüdür. Genel çözüme dikkat edilirse, bu çözümün denklemin bir *Tekil-Çözümü* olduğu görülür (*gözlemleyiniz!*).

B4. (Değişkenlerine Ayrılabilir denklem)

$$y'+(1-y^2)\tan x=0 \;\Rightarrow\; \underbrace{\int \frac{1}{1-y^2}\,dy}_{=I_1}=\underbrace{-\int \tan x\,dx}_{=I_2} \quad (y^2\neq 1\,, x\neq(2n-1)\pi/2\,, n=0,\mp1,\dots)$$

I_1 ve I_2 integrali hesaplanırsa: $I_1=\dfrac{1}{2}\ell n\left|\dfrac{1+y}{1-y}\right|+k_1$, $I_2=\ell n\left|\cos x\right|+k_2$ bulunur (*inceleyip, ara işlemleri yapınız!*).

$$\Rightarrow\; \frac{1}{2}\ell n\left|\frac{1+y}{1-y}\right|=\ell n\left|\cos x\right|+\frac{1}{2}\ell n\left|c\right|$$

$$\Rightarrow\; \frac{1+y}{1-y}=c\cos^2 x$$

$$\boxed{\Rightarrow\; y=\frac{-1+c\cos^2 x}{1+c\cos^2 x} \qquad [\textbf{Genel Çözüm}] \qquad I:\; y^2\neq 1\,, x\neq(2n-1)\pi/2\,, n=0,\mp1,\dots}$$

$y^2=1 \;\Rightarrow\; y=\mp1$ için *çözüm araştırması yapınız!*

B5. (Homojen hale getirilebilen denklem)

I.yol : $y'=\dfrac{-2x+y-4}{x+2y+7}$,

$$\left.\begin{aligned}-2x+y-4&=0\\ x+2y+7&=0\end{aligned}\right\}$$

$-2\neq 2 \;\Rightarrow$ doğruları kesişirler. Dikkat edilirse, Kesişim Noktası: $(-3,-2)$ dir.

Orjin: $(-3,-2)$ ye taşınırsa (ötelenirse), yani "denklem için $\bar{x}=x+3$, $\bar{y}=y+2$ dönüşümü yapılırsa", denklem: Homojen hale gelecektir.

$$\left.\begin{array}{c} \bar{x}=x+3,\ \bar{y}=y+2 \\ \bar{y}=\bar{y}(\bar{x}) \\ d\bar{x}=dx,\ d\bar{y}=dy \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=\frac{-2\bar{x}+\bar{y}}{\bar{x}+2\bar{y}}=\frac{-2+(\bar{y}/\bar{x})}{1+2(\bar{y}/\bar{x})}$$ (Homojendir,*gözleyiniz!*)

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\bar{y}}{\bar{x}}=u,\ \bar{y}=\bar{x}u,\ u=u(t) \\ \bar{y}'=\dfrac{-2+u}{1+2u} \end{array}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{\bar{x}\text{-ye göre türev}} \bar{y}'=u+\bar{x}u'=\frac{-2+u}{1+2u}$$

$$\Rightarrow \bar{x}u'=\frac{-2+u}{1+2u}-u$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\int\frac{1+2u}{1+u^2}\,du}_{=I_1}=-\int\frac{1}{\bar{x}}\,d\bar{x} \qquad (\bar{x}\neq 0)$$

I_1 integrali hesaplanırsa: $I_1=\frac{1}{2}\arctan u+\frac{1}{2}\ell n(1+u^2)+k_1$ bulunur (*inceleyip, ara işlemleri yapınız!*).

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\arctan u+\frac{1}{2}\ell n(1+u^2)=-\ell n|\bar{x}|+\frac{1}{2}c$$

$$\Rightarrow \arctan u+\ell n(1+u^2)=-2\ell n|\bar{x}|+c$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{u=\frac{\bar{y}}{\bar{x}}=\frac{y+2}{x+3}\text{ idi}} \quad \arctan\left(\frac{y+2}{x+3}\right)+\ell n\left(1+\left(\frac{y+2}{x+3}\right)^2\right)=-2\ell n|x+3|+c$$ [Genel Çözüm]

$I:\ x\neq -3$

II.yol : $\underbrace{(2x-y+4)}_{=u}dx+\underbrace{(x+2y+7)}_{=v}dy=0$,

$$\left.\begin{aligned} du &= 2dx - dy \\ dv &= dx + 2dy \end{aligned}\right\} \Rightarrow 5dx = 2du + dv \;, \quad 5dy = -du + 2dv \quad \text{(denklemde yerine yazalım)}$$

$$\Rightarrow u(2du + dv) + v(-du + 2dv) = 0$$

$$\Rightarrow (2u - v)du + (u + 2v)dv = 0 \quad (\text{Homojendir,}\textit{gözleyiniz!})$$

Şimdi $u = tv$ dönüşümü yapalım. $\Rightarrow$ $du = vdt + tdv$ (denklemde yerine yazalım)

$$\Rightarrow (2vt - v)(vdt + tdv) + (vt + 2v)dv = 0 \quad \Rightarrow \quad v^2(2t-1)dt + 2v(t^2+1)dv = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2t-1}{t^2+1}v^2dt + \frac{2}{v}dv = 0 \quad (\text{Değiş.Ayrılabilir}) \quad (v \neq 0) \text{ elde edilir}$$

(*geri kalan integral hesabı I.yol ile aynı, tamamlamak okuyucuya bırakılmıştır!*)

B6. ($y' = f(ax + by + c)$ formatında Değişkenlerine-Ayrılabilir hale getirilebilen denklem**)**

Denklem, $x + y = u$ dönüşümü ile Değişkenlerine Ayrılabilir hale getirilebilir:

$$\left.\begin{aligned} x + y = u \,,\; u = u(x) \\ y' = \frac{1}{u^2} \end{aligned}\right\} \underset{x\text{-e göre türev}}{\Rightarrow} 1 + \underbrace{y'}_{=\frac{1}{u^2}} = u' \Rightarrow \frac{u^2}{u^2+1}du = dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int \frac{u^2}{u^2+1}du}_{=I_1} = \int dx$$

I_1 integrali hesaplanırsa: $I_1 = u - \arctan u + k_1$ bulunur (*inceleyip, ara işlemleri yapınız*!).

$$\Rightarrow \quad u - \arctan u = x + c$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\underbrace{\Rightarrow}_{u=x+y \text{ idi}} \quad x + y - \arctan(x+y) = x + c \quad [\text{Genel Çözüm}] \\ &I: -\infty < x < \infty \end{aligned}}$$

B7. (Değişkenlerine Ayrılabilir denklem**)**

$$y' = x^2e^ye^{-x^3} \quad \Rightarrow \quad \int e^{-y}\,dy = \int x^2e^{-x^3}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad -e^{-y} = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + c \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

$$I: \ -\infty < x < \infty$$

Şimdi denklemin verilen koşulundan sağlayan çözümünü bulalım.

$$\left.\begin{array}{c} y(0)=0 \\ \text{yani } x=0 \ \text{ için } \ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \text{genel çözümden: } \ -1 = -\frac{1}{3} + c \ \Rightarrow \ c = -\frac{2}{3}$$

Benzer şekilde, $y(+\infty)=0$ dan $-e^{0} = -\frac{1}{3}\underbrace{e^{-\infty^3}}_{=\left(\frac{1}{e}\right)^{\infty}=0} + c \ \Rightarrow \ c=-1$

O halde *i)* için, istenilen çözüm :	$3e^{-y} = 2 + e^{-x^3}$
O halde *ii)* için, istenilen çözüm :	$3e^{-y} = 3 + e^{-x^3}$

B8. ($y' = f(ax+by+c)$ formatında Değişkenlerine-Ayrılabilir hale getirilebilen denklem**)**

Dikkat: $x-y+1=u$ dönüşümü yapmaktansa, kareköklü ifadeden ötürü kolaylık olsun diye bu sefer $x-y+1=u^2$ dönüşümü yapalım: (bu dönüşümü yaparken denklemin yalnızca $x-y+1 \geq 0$ durumunda tanımlı olduğuna da dikkat ediyoruz)

$$\left.\begin{array}{c} x-y+1=u^2, \ u=u(x) \\ y'=4u \end{array}\right\} \underset{x\text{-e göre türev}}{\Rightarrow} \ 1-\underbrace{y'}_{=4u} = 2uu' \ \Rightarrow \ 1-4u=2uu'$$

$$\Rightarrow \ \underbrace{\int \frac{2u}{1-4u}\,du}_{=I_1} = \int dx \qquad (u \neq \frac{1}{4})$$

I_1 için: $\dfrac{2u}{1-4u} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1/2}{1-4u}$ gözleminden, $I_1 = -\dfrac{u}{2} - \dfrac{1}{8}\ell n\left|1-4u\right| + k_1$ olduğu kolayca görülür.

$$\Rightarrow \quad -\frac{u}{2} - \frac{1}{8}\ell n\left|1-4u\right| = x + c \qquad \ldots\text{(B8-1)}$$

bulunur $x-y+1=u^2$ idi $\Rightarrow$ $u=\mp\sqrt{x-y+1}$ değerinin (B8-1) de yerine yazılmasıyla Genel Çözüm elde edilir ($I:\ x-y+1\geq 0,\ y\neq x+\dfrac{15}{16}$).

$u=\sqrt{x-y+1}=\dfrac{1}{4}$ için çözüm araştırması:

$\sqrt{x-y+1}=\dfrac{1}{4}$ den $y=x+\dfrac{15}{16}$ bulunur, bu eğri diferansiyel denklemi sağlar (*gözlemleyiniz!*) dolayısıyla denklemin bir çözümüdür. Genel çözüme dikkat edilirse, bu çözümün denklemin bir *tekil- çözümü* olduğu görülür (*gözlemleyiniz!*).

B9. (Özel-formda Değişkenlerine-Ayrılabilir hale getirilebilen denklem**)**

$$x-xy'=\cos(x-y)\quad\Rightarrow\quad x(1-y')=\cos(x-y)$$

olduğundan dikkat edilirse, $x-y=u$, $u=u(x)$ dönüşümü yapıldığında $x-y=u$ ifadesinin x-e göre türevi $1-y'=u'$ olacağından denklem $xu'=\cos u$ değişkenlerine ayrılabilir hale gelir :

$$\Rightarrow\ x(\underbrace{1-y'}_{=u'})=\cos(\underbrace{x-y}_{=u})$$

$$\Rightarrow\ xu'=\cos u\ \Rightarrow\ \underbrace{\int\frac{1}{\cos u}\,du}_{=I_1}=\int\frac{1}{x}\,dx\qquad(\cos u\neq 0)$$

$\Rightarrow I_1=\ell n\left|\dfrac{1}{\cos u}+\tan u\right|+k_1$ bulunur (*inceleyip, ara işlemleri yapınız!*).

$$\Rightarrow\ \ell n\left|\frac{1}{\cos u}+\tan u\right|=\ell n\,|x|+\ell n\,c\qquad\Rightarrow\ \frac{1}{\cos u}+\tan u=cx$$

$\Rightarrow\ 1+\sin u=cx\cos u$ bulunur.

$$\underbrace{\Rightarrow}_{u=x-y\ \text{idi}}\qquad 1+\sin(x-y)=cx\cos(x-y)\qquad[\textbf{Genel Çözüm}]$$

$$I:\ x\neq 0\ ,y\neq x-(2n-1)\pi/2\ ,n=\mp1,\mp3,\mp5...$$

$u = x - y = (2n-1)\pi/2 \ \ (n = 0, \mp 1, \dots) \Rightarrow \ y = x - \frac{(2n-1)\pi}{2}$ için çözüm araştırması:

Bu eğri diferansiyel denklemi sağlar (*gözlemleyiniz!*) dolayısıyla denklemin bir çözümüdür. Genel çözüme dikkat edilirse, $n = 0, \mp 2, \mp 4 \dots$ için $y = x - \frac{(2n-1)\pi}{2}$: denklemin *özel-çözümleridir*; $n = \mp 1, \mp 3, \mp 5 \dots$ için $y = x - \frac{(2n-1)\pi}{2}$: denklemin *tekil- çözümleridir* (*gözlemleyiniz!*).

B10. ($y' = f(ax+by+c)$ formatında Değişkenlerine-Ayrılabilir hale getirilebilen denklem**)**

$y' = -\frac{x+y}{3(x+y)-1}$. Denklem, $x + y = u$ dönüşümü ile Değişkenlerine Ayrılabilir hale getirilebilir:

$$\left.\begin{aligned} x + y = u, \ u = u(x) \\ y' = -\frac{u}{3u-1} \end{aligned}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{x\text{-e göre türev}} 1 + \underbrace{y'}_{=-\frac{u}{3u-1}} = u' \Rightarrow \frac{3u-1}{2u-1} du = dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int \frac{3u-1}{2u-1} du}_{=I_1} = \int dx \quad (u \neq 1/2)$$

I_1 integrali hesaplanırsa: $I_1 = \frac{3}{2}u + \frac{1}{4}\ell n|2u-1| + k_1$ bulunur (*inceleyip, ara işlemleri yapınız!*).

$$\Rightarrow \frac{3}{2}u + \frac{1}{4}\ell n|2u-1| = x + c$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{u=x+y \text{ idi}} \frac{3}{2}(x+y) + \frac{1}{4}\ell n|2x+2y-1| = x + c \quad \text{[Genel Çözüm]}$$

$$I:\ y \neq -x + \frac{1}{2}$$

$u = x + y = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ y = -x + \frac{1}{2}$ için çözüm araştırması:

Bu eğri diferansiyel denklemi sağlar (*gözlemleyiniz!*) dolayısıyla denklemin bir çözümüdür. Genel çözüme dikkat edilirse, bu çözümün denklemin bir *tekil- çözümü* olduğu görülür (*gözlemleyiniz!*).

B11. (Homojen denklem)

$p\,dx + q\,dy = 0$ yazımından; $p(x,y) = y - x$, $q(x,y) = x + y$ fonksiyonları 1.dereceden homojendirler (*gözlemleyiniz!*). $y' = \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{1-y/x}{1+y/x}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y}{x} = u,\ y = xu\ ,\ u = u(x) \\ \qquad y' = \dfrac{1-u}{1+u} \end{array}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{x\text{-e göre türev}} \quad y' = u + xu' = \frac{1-u}{1+u}$$

$$\Rightarrow\ xu' = \frac{1-u}{1+u} - u \ \Rightarrow\ -\int \frac{1+u}{u^2+2u-1}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$(x \neq 0\ ,\ u^2 + 2u \neq 1)$$

$$\Rightarrow\ -\frac{1}{2}\ell n\left|u^2+2u-1\right| = \ell n\left|x\right| - \frac{1}{2}\ell n\left|c\right|$$

$$\Rightarrow\ u^2 + 2u - 1 = \frac{c}{x^2}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{u=\frac{y}{x}\text{ idi}} \quad \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{2y}{x} - 1 = \frac{c}{x^2} \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

$$I:\ x \neq 0\ ,\ y^2 + 2xy \neq x^2$$

B12. (Belirli integral içeren denklemi: bir dif. denk. problemine dönüştürme)

Uygun koşullar altında, aşağıdaki özellik geçerlidir. <u>Bu koşulları belirlemek ise okuyucuya bırakılmıştır</u> ("İntegral Hesabın Temel Teoreminin 1.kısmından" yararlanabilirsiniz!), (*dolayısıyla belirlemeden aşağıdaki özelliği kullanma hakkına sahip değilsiniz!*)

$$\text{“}\, y' = f(x,y),\ y(a) = b \,\text{”} \ \Leftrightarrow\ \text{“}\, y = b + \int_a^x f(t, y(t))\,dt \,\text{”}$$

$$y = 1 + \int_1^x \frac{t - y(t)}{t + y(t)}\, dt \Rightarrow \text{“}\, y' = \frac{x-y}{x+y}\,,\; y(1) = 1\text{”}$$

$\Rightarrow$ B11 deki denklem için, bir Başlangıç-Değer problemidir.

$\Rightarrow$ Genel Çözüm: $(\frac{y}{x})^2 + \frac{2y}{x} - 1 = \frac{c}{x^2}$ idi.

$$\left.\begin{array}{r} y(1) = 1 \\ \text{yani } x = 1 \text{ için } y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ genel çözümden: } (\frac{1}{1})^2 + \frac{2}{1} - 1 = \frac{c}{1^2} \Rightarrow c = 2$$

$$\boxed{\text{O halde istenilen çözüm : } \quad y^2 + 2xy - x^2 = 2}$$

Not: *Çözümün, çözüme başlarken bahsedilen uygun koşulları sağladığı gözlemlenmeli, aksi halde çözüm olamayacaktır!*

B13. (Genelleştirilmiş Homojen denklem**)**

$F(x, y, dx, dy) := x^2 y^2 dy + (xy^3 + 1)dx = 0$

$x \to tx$, $y \to t^k y$, $dy \to t^{k-1} dy$, $dx \to dx$ yazımları yapıldığında, $k = -\frac{1}{3}$ için $F(tx, t^k y, dx, t^{k-1} dy) = t^0 F(x, y, dx, dy)$ eşitliği sağlanır $\Rightarrow$ Denklem: Genelleştirilmiş Homojendir.

$$\left.\begin{array}{l} u = \dfrac{y}{x^{-1/3}},\; y = x^{-1/3} u, \\ \quad u = u(x) \\ y' = \dfrac{-1 - xy^3}{x^2 y^2} \\ \quad = x^{-4/3}\left(\dfrac{-1-u^3}{u^2}\right) \end{array}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{x\text{-e göre türev}} \begin{array}{l} y' = -\dfrac{1}{3} x^{-4/3} u + x^{-1/3} u' \\ \Rightarrow x^{-4/3}\left(\dfrac{-1-u^3}{u^2} + \dfrac{1}{3} u\right) = x^{-1/3} u' \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{3u^2}{3 + 2u^3} du = -\frac{1}{x} dx \quad \text{(Değiş.Ayrılabilir)} \quad (x \neq 0\,,\; 2u^3 \neq -3) \text{ elde edilir}$$

S.İlter, http://aves.istanbul.edu.tr/ilters

$$\Rightarrow \int \frac{3u^2}{3+2u^3}\,du = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ell n\left|3+2u^3\right| = -\ell n\left|x\right| + \frac{1}{2}\ell n\left|c\right| \quad \Rightarrow \ 3+2u^3 = \frac{c}{x^2}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{u=\frac{y}{x^{-1/3}}\ \text{idi}} \quad y^3 = \frac{c}{2x^3} - \frac{3}{2x} \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

$$I:\ x \neq 0\,,\ 2y^3 \neq -3$$