DİF. DENK II (MATEMATİK BÖL.) - ÇALIŞMA SORULARI 3

24.03.2015

A. Aşağıda yanlarında bir özel çözümü verilen denkl.in Genel Çözümlerini belirleyiniz

1) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0 \quad , \quad y_1 = x^2 e^x$

2) $x^2(1-\ln x)y'' + xy' - y = 0 \quad , \quad y_1 = x$

3) $y'' + (\tan x)y' - 2(\cot^2 x)y = 0 \quad , \quad y_1 = \dfrac{1}{\sin x}$

Açıklamalar: Abel formülünden (Ostrogradsky-Liouville Formülünün bir özel hali olan) den yararlanınız

---

B. Aşağıda Temel Çözümler Sistemi verilen Dif. Denk.i bulunuz.

1) $y_1 = x^2+2 \quad , \quad y_2 = x^3$

2) $y_1 = 1 \quad , \quad y_2 = x \quad , \quad y_3 = \ln x$

3) $y_1 = e^x \quad , \quad y_2 = x \quad , \quad y_3 = 1$

[Açıklamalar: Wronsky determinantı yardımıyla yapılacak.]

C. $y = x - e^{2x}\cos 2x$ çözümünü sağlayan sabit katsayılı, lineer-homojen denk.i bulunuz

Açıklamalar: KD yardımıyla yapılacak; oluşturulacak denkl.in lineer bağımsız çözümlerinden bahsedilecek (yani, T.Ç.S. den); belirlenebilecek en küçük mertebeli denk. bulunacak

---

S. İLTER http://aves.istanbul.edu.tr/ilters

D) Aşağıdaki denk için Genel Çözümleri belirleyiniz
Yanında başlangıç koşulu olan için ise istenilen çözümü belirleyiniz

1) $y''' - 2y'' - 15y' = 0$

2) $y^{(4)} - 4y'' = 0$

3) $y''' + 2y'' + y' = 0$

4) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

5) $y^{IV} + 9y'' = 0 \quad ; \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 27 \end{cases}$

(2) **A1** $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$ denkleminin bir çözümü $y_1 = x^2 e^x$ ise bu denklemin genel çözümünü bulunuz

$$y'' - \frac{2x+1}{x} y' + \frac{x+1}{x} y = 0$$

$(x \neq 0)$

$\left(y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0 \right)$

$x=0$ da katsayılar süreksiz $I = (0, \infty)$ seçelim.

$$\Rightarrow \quad P(x) = -\frac{2x+1}{x}$$

$$\int P(x)\,dx = -\int \left(2 + \frac{1}{x}\right) dx = -(2x + \ln x) + k_1 \quad , \; k_1 = 0 \text{ alalım}$$

$$= -2x - \ln x$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\int P(x)dx} = e^{2x + \ln x} = e^{2x} \cdot e^{\ln x} = x \cdot e^{2x} \quad \text{olur}$$

(Abel formülünden)

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} \, dx = x^2 e^x \int \frac{x e^{2x}}{x^4 e^{2x}} dx =$$

$$= x^2 e^x \underbrace{\int \frac{1}{x^3} dx}_{= I_1}$$

$I_1 = -\frac{1}{2x^2} + k_2$ olacaktır $k_2 = 0$ alalım

$$\Rightarrow \quad y_2 = x^2 e^x \left(-\frac{1}{2x^2}\right) = -\frac{1}{2} e^x$$

$\Rightarrow$ genel çözüm $\boxed{y = c_1 x^2 e^x + c_2 e^x}$ şeklinde olacaktır

A2

③ $x^2(1-\ln x)y''+xy'-y=0$ denkleminin bir çözümü $y_2=x$ ise bu denklemin genel çözümünü bulunuz

$$y''+\frac{1}{x(1-\ln x)}y'-\frac{1}{x^2(1-\ln x)}y=0 \quad [x^2(1-\ln x)\neq 0]$$

$(y''+P(x)y'+Q(x)y=0)$

$I: [x^2(1-\ln x)\neq 0]\wedge[x>0]$ özellikler sağlayan aralık olsun

$\Rightarrow P(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$

($\ln x=u$ dönüşümü ile integralin değerini kolaylıkla hesaplarız)

$$\int P(x)\,dx=\int\frac{1}{x(1-\ln x)}dx=-\ln|1-\ln x|+k_1 \quad , k_1=0 \text{ alalım}$$
$$=-\ln|1-\ln x| \quad \text{bulunur}$$

$$\Rightarrow e^{-\int P(x)dx}=e^{\ln|1-\ln x|}=1-\ln x \quad \text{olur}$$

(Abel formülünden)

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}\,dx=x\underbrace{\int\frac{1-\ln x}{x^2}dx}_{=I_1 \text{ diyelim}}$$

$$I_1=\int\frac{1}{x^2}dx-\underbrace{\int\frac{\ln x}{x^2}dx}_{=I_2 \text{ diyelim}}$$

I_2 için $\ln x=u$ dönş. yapalım
$\Rightarrow \frac{1}{x}dx=du$
$dx=x\,du$

$$I_2=\int u.e^{-u}du=(-u-1)e^{-u}+k_2$$
$$=\frac{-1-\ln x}{x} \quad \text{olur} \quad (k_2=0 \text{ alalım})$$

$$\Rightarrow I_1=-\frac{1}{x}+\frac{(1+\ln x)}{x} \quad \text{olur} \Rightarrow y_2=x\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)$$

$\Rightarrow y_2=\ln x$ bulunur $\Rightarrow$ genel çözüm: $\boxed{y=C_1x+C_2\ln x}$

④ A3 $y'' + (\tan x)y' - 2(\cot^2 x)y = 0$ denkleminin bir çözümü

$y_1 = \dfrac{1}{\sin x}$ ise bu denklemin genel çözümünü bulunuz

---

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \Rightarrow P(x) = \tan x$ $\quad \begin{pmatrix} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{pmatrix}$

(y_1 tanımlı olmalı) $\wedge$ (katsayılar sürekli olmalı) $\Rightarrow I$: bu iki özelliği sağlayan aralık olsun

$\Rightarrow \int P(x)\,dx = -\ln|\cos x| + k_1$, $k_1 = 0$ alalım

$= -\ln|\cos x|$

$\Rightarrow e^{-\int P(x)dx} = e^{\ln|\cos x|} = \cos x$ bulunur.

(Abel formülünden)

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx}\,dx = \frac{1}{\sin x} \underbrace{\int \sin^2 x \cdot \cos x\,dx}_{= I_1 \text{ diyelim}}$$

I_1 için $\sin x = u$ dönüşümü yapalım
$\Rightarrow \cos x\,dx = du$
$dx = \frac{1}{\cos x} du$

$$I_1 = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + k_2 \quad , (k_2 = 0 \text{ alalım})$$
$$= \frac{\sin^3 x}{3}.$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{1}{\sin x}\left(\frac{\sin^3 x}{3}\right) = \frac{\sin^2 x}{3}$$

$\Rightarrow$ genel çözüm $\boxed{y = c_1 \frac{1}{\sin x} + c_2 \cdot \sin^2 x}$

6 B1 $y_1 = x^2+2$, $y_2 = x^3$ temel çözümler sistemi verilen diferansiyel denklemi bulunuz

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2+2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4+6x^2-2x^4$$
$$= x^4+6x^2$$
$$= x^2(x^2+6) \not\equiv 0 \quad \text{bulunur} \quad (\forall x \in I)$$

$$\Rightarrow (\text{formülü}) \quad \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2(x^2+6)} \cdot \begin{vmatrix} x^2+2 & x^3 & y \\ 2x & 3x^2 & y' \\ 2 & 6x & y'' \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2(x^2+6)} \left[y \begin{vmatrix} 2x & 3x^2 \\ 2 & 6x \end{vmatrix} - y' \begin{vmatrix} x^2+2 & x^3 \\ 2 & 6x \end{vmatrix} + y'' \underbrace{\begin{vmatrix} x^2+2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix}}_{= W(x) \text{ olacak zaten}} \right] =$$

$$= \frac{1}{x^2(x^2+6)} \left[(12x^2-6x^2)y - (6x^3+12x-2x^3)y' + (3x^4+6x^2-2x^4)y'' \right]$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow y'' - \frac{4x^3+12x}{x^2(x^2+6)} y' + \frac{6}{x^2+6} y = 0 \quad \text{bulunur}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(x^2+6)y'' - 4(x^2+3)y' + 6xy = 0}$$

$I: x \neq 0$

[NOT: $y_1 = x^2+2$, $y_1 = x^3$ çözümlerinin denklemi sağladığını KONTROL EDINIZ!]

(7) B2 $y_1(x)=1$, $y_2(x)=x$, $y_3(x)=\ln x$ temel çözümler sistemi verilen diferansiyel denklemi bulunuz

---

$$W(x)=\begin{vmatrix}1 & x & \ln x\\ 0 & 1 & \frac{1}{x}\\ \boxed{0 \quad 0 \quad -\frac{1}{x^2}}\end{vmatrix} = -\frac{1}{x^2}\begin{vmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{vmatrix} = -\frac{1}{x^2}\neq 0$$

$(\forall x\in I)$

(formülden)
$$\frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & y_3 & y\\ y_1' & y_2' & y_3' & y'\\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y''\\ y_1''' & y_2''' & y_3''' & y'''\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\quad -x^2\begin{vmatrix}1 & x & \ln x & y\\ 0 & 1 & \frac{1}{x} & y'\\ 0 & 0 & -\frac{1}{x^2} & y''\\ \boxed{0 \quad 0 \quad \frac{2}{x^3} \quad y'''}\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\quad -x^2\left[-\frac{2}{x^3}\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & y'\\ \boxed{0 \quad 0 \quad y''}\end{vmatrix} + y'''\begin{vmatrix}1 & x & \ln x\\ 0 & 1 & \frac{1}{x}\\ \boxed{0 \quad 0 \quad -\frac{1}{x^2}}\end{vmatrix}\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad -x^2\left[-\frac{2}{x^3}y''-\frac{1}{x^2}y'''\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\frac{2}{x}y''+y'''=0}$$

I: $\mathbb{R}$ de $x\neq 0$ özelliğini sağlayan aralık

[NOT: $y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=\ln x$ çözümlerinin denklemi sağladığını (bi zahmet) KONTROL EDİNİZ!]

8 B3 $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = 1$ temel çözümler sistemi verilen diferansiyel denklemi bulunuz.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & x & 1 \\ e^x & 1 & 0 \\ \boxed{e^x \quad 0 \quad 0} \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -e^x \neq 0 \quad (\forall x \in I)$$

(formülden)

$$\frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y \\ y_1' & y_2' & y_3' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' & y''' \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{e^x} \begin{vmatrix} e^x & x & 1 & y \\ e^x & 1 & 0 & y' \\ e^x & 0 & 0 & y'' \\ \boxed{e^x \quad 0 \quad 0 \quad y'''} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{e^x}\left[-e^x \begin{vmatrix} x & 1 & y \\ 1 & 0 & y' \\ \boxed{0 \quad 0 \quad y''} \end{vmatrix} + y''' \begin{vmatrix} e^x & x & 1 \\ e^x & 1 & 0 \\ \boxed{e^x \quad 0 \quad 0} \end{vmatrix}\right] = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{e^x}\left[-e^x(-y'') + y'''(-e^x)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-y'' + y''' = 0}$$

$I \subset \mathbb{R}$ de herhangi bir aralık

[NOT: $y_1 = e^x$, $y_2 = x$, $y_3 = 1$ çözümlerinin denklemi sağladığını KONTROL EDINIZ!]

c) $y = x - e^{2x}\cos 2x$

$y_1 = x \,, \quad y_2 = e^{2x}\cos 2x$

$\Rightarrow$ K.D. kökleri : $\underbrace{\lambda_1 = \lambda_2 = 0}_{\text{$y_1=x$ çözümü bu iki katlı kökten geliyordu.}} \,, \quad \underbrace{\lambda_{3,4} = 2 \pm 2i}_{\text{y_2 çözümü $2+2i$ den geliyordu (Eşleniği de çözüm olacağından $2\pm2i$)}}$

O halde 4. mertebe, sabit katsayılı, lineer-homojen dak oluşturacağız

lineer bağımsız çözümler (yani, T.Ç.S. i) : $\left\{ \begin{array}{ll} y_1 = x \,, & y_2 = e^{2x}\cos 2x \\ y_3 = 1 \,, & y_4 = e^{2x}\sin 2x \end{array} \right. \Rightarrow$

{ oluşturacağımız denklemin G.Ç : $y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + c_4y_4$ old. biliyoruz. }

$\Rightarrow$ KD : $\lambda^2 \underbrace{\left[\lambda - (-2+2i)\right]\left[\lambda + (-2-2i)\right]}_{= \lambda^2 - 4\lambda + 8} = 0$

$\Rightarrow \underline{\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 = 0}$ K.D.

$\Rightarrow$ denklem ($y^{(i)} = \lambda^i$ idi)

$$\boxed{y^{IV} - 4y''' + 8y'' = 0}$$

D1) $y''' - 2y'' - 15y' = 0$

Karakteristik Denklem : $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 15\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 15) = 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 5 \\ \lambda_3 = -3 \end{array}\right\} \underset{\text{G.Ç.}}{\Rightarrow} \boxed{y = c_1 + c_2 e^{5x} + c_3 e^{-3x}}$$

D2) $y^{(4)} - 4y'' = 0$

K.D. $\lambda^4 - 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2 - 4) = 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 2 \\ \lambda_4 = -2 \end{array}\right\} \underset{\text{G.Ç.}}{\Rightarrow} \boxed{y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}}$$

D3) $y''' + 2y'' + y' = 0$

K.D. $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = \lambda(\lambda + 1)^2 = 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1 \end{array}\right\} \underset{\text{G.Ç.}}{\Rightarrow} \boxed{y = c_1 + (c_2 + c_3 x)e^{-x}}$$

D4) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

K.D. $\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ olduğundan

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 & \lambda - 1 \\ \hline -\lambda^3 \pm \lambda^2 & \lambda^2 + 4 \\ \hline 4\lambda - 4 & \\ -4\lambda - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \mp 2i$

$\Rightarrow \boxed{y = c_1 e^{x} + c_2 \sin 2x + c_3 \cos 2x}$

D3) $y^{IV} + 9y'' = 0$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=9$, $y'''(0)=27$

K.D. $\lambda^4 + 9\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2+9) = 0$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lambda_1=\lambda_2=0\\ \lambda_{3,4}=\mp 3i\end{array}\right\} \underset{G.Ç.}{\Rightarrow} \boxed{y = c_1 + c_2 x + c_3\cos 3x + c_4 \sin 3x}$

$\left.\begin{array}{l} y' = c_2 - 3c_3\sin 3x + 3c_4\cos 3x \\ y'' = -9c_3\cos 3x - 9c_4\sin 3x \\ y''' = 27c_3\sin 3x - 27c_4\cos 3x \end{array}\right\}$ (*)

Başlangıç koşulları : $x=0$ iken $\left\{\begin{array}{l} y'=0,\ y''=9 \\ y'''=27\end{array}\right.$

$\Rightarrow y(0)=0 \underset{G.Ç.den}{\Rightarrow} c_1 + c_2.0 + c_3\cos 0 + c_4\sin 0 = 0 \Rightarrow \underline{c_1 + c_3 = 0}$ -- (1)

$\Rightarrow y'(0)=0 \underset{(*)\text{den}}{\Rightarrow} \underline{c_2 + 3c_4 = 0}$ -- (2)

$\Rightarrow y''(0)=9 \underset{(*)\text{dan}}{\Rightarrow} 9c_3 = 9 \Rightarrow \underline{c_3 = -1}$ -- (3)

$\Rightarrow y'''(0)=27 \underset{(*)\text{dan}}{\Rightarrow} -27c_4 = 27 \Rightarrow \underline{c_4 = -1}$ -- (4)

(1)-(2)-(3)-(4) den : $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_3 = -1$, $c_4 = -1$

$\underset{\text{istenilen çözüm}}{\Rightarrow} \boxed{y = 1 + 3x - \cos 3x - \sin 3x}$