

Diferansiyel Denklemler I

(Astronomi ve Uzay Bilimleri Böl.)

Final Sınavı Hazırlık Soruları

18.12.2017

SORU. Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulunuz.

1. $2y' + y = \frac{e^x}{y}$

2. $yy' - x^2y'^2 = 0$

3. $xy'^2 + yy' = xy' + y$

4. $y = xy' + e^{y'}$

5. $y''' + y'' = e^{-x} - 1$

6. $y'' + 4y' + 2y - 1 = 0$

7. $y'' + 4y' + 6y - 1 = 0$

8. $y'' - 2y' + 5y = \cos x$

Örnek-1

I) Bernoulli Df. Denk

$$y' + P(x)y = q(x)y^n \quad (n \neq 1)$$

Denk.in her iki tarafı y^n e bölünür :

$$y^{-n} \cdot y' + P(x)y^{1-n} = q(x)$$

buraya dönüşüm uygulanır.

$$z = y^{1-n}, \quad z = z(x)$$

Dönüşüm sonrası türev : $\begin{cases} z' = (1-n)y^{1-n-1}y' = (1-n)y^{-n} \cdot y' \\ \text{(x-e göre türev)} \end{cases}$

$\Rightarrow y^{-n} \cdot y' = \frac{1}{1-n} z'$ olur. Denk de yeme yazılır :

$$\frac{1}{1-n} z' + P(x)z = q(x)$$

Denklemin $(1-n)$ ile çarpılır : $\boxed{z' + (1-n)P(x)z = (1-n)q(x)}$
(her iki tarafı)

Şeklinde lineer df. denk. haline getirilir

ve lineer denklemin çözümü bulunarak devam edilir

Önemli

Sabit Katsayılı Lineer - Homogen Olmayan Dif. Denk.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \quad \dots (1)$$

(burada; $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)}$ (y var, y nin n . türevi), $g(x) \neq 0$)
şeklindeki denklemler ile ilgileneceğiz.

$$(1) \text{ denklemin Genel Çözümü} : y = \underbrace{y_h}_{\text{denklemin homogen kısmının genel çözümü}} + \underbrace{y_p}_{\text{denklemin bir özel çözümü}}$$

Şöyledir

A. y_h in bulunması

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad \dots (2)$$

denkleme : (1) denklemin Karakteristik Denklemi, kısaca KD, denir

[Dikkat; bu denklem : (1) de, " $y=y$, $y'=\lambda$, $y''=\lambda^2$, ..., $y^{(n)}=\lambda^n$ " konuları] elde edilir. n . dereceli bir polinomdur ve n tane kökü vardır.
 y_h : n -tane köke bakarak, bu köklere karşılık lineer bağımsız çözümler elde edilerek tespit edilecektir.

Al. KD. nın kökleri yardımıyla y_h nı bulma:

1) (2) nın kökleri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ hepsi reel ve birbirinden farklı ise

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$$

fonksiyonları denklemin lineer bağımsız çözümleri olurlar (Denk. nın homojen çözüm)

$\Rightarrow$ bu köklere karşılık gelen çözüm:

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

($c_1, c_2, \dots, c_n$: genel çözümdeki keyfi sabitler)

2) KD. nın katlı kökü olması Hali:

KD nın k -katlı bir λ köküne karşılık gelen çözüm:

$$\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_k x^{k-1} \right) e^{\lambda x} \quad \text{seçilmektedir}$$

NOT işze anlaşılması için bu iki duruma art kısa örnekler:

K.D nın kökleri

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$$

$$\Rightarrow y_h = c_1 e^x + c_2 e^{5x}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

$$\Rightarrow y_h = (c_1 + c_2 x) e^{-2x}$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$$

$$\Rightarrow y_h = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x) e^{3x}$$

3) KD nm Kompleks köklerin olması Hali :

KD. m bir kökü $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ olsun Bu kökün eşleniği yani $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ da denklemin bir kökü olur.

0 halde $\lambda_{1,2}$ ye karşılık gelen (her iki köke karşılık gelen)
çözümü ayrı anda yazıyoruz)

Çözümü :

$$\underline{e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)} \quad \text{dn}$$

ör

KD nm kökleri

Çözüm

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm i, \lambda_3 = 0 \Rightarrow y_h = e^{2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + c_3$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_{3,4} = 1 \pm i \Rightarrow y_h = c_1 + c_2 x + e^x (c_3 \cos x + c_4 \sin x)$$

B. y_0 in bulunması? (Belirsiz katsayılar yöntemi)

(1) denk. de $g(x)$ fonks. u :

- Üstel fonksiyon $(e^{2x}, 2^x, \dots)$
- polinom fonksiyon $(x^2+1, x-1, \dots)$
- sinüs veya kosinüs fonks. u. $(\sin 2x, \cos x, \dots)$
- veya yukarıdaki fonks. ların birbirleri ile çarpımları şeklinde fonksiyon $(x \sin x, x^2 e^x, \dots)$

ise y_0 in bulunmasında bu yöntem kullanılır

1) polinom fonks. u : $\left\{ \begin{array}{l} g(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \\ \text{seçimde ise,} \end{array} \right.$

* " 0 : k.D. in kökü değil" $\Rightarrow y_0 = \underline{A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0}$

* " 0 : k.D. in k -katlı kökü" $\Rightarrow y_0 = x^k (\quad)$

NOT: Buradaki sabitler denk. de yerine konulduğunda tespit edilecek sabitlerdir

ör: $g(x) = x^2 + x - 1$
" 0 : k.D. in 2-katlı kökü" $\Rightarrow y_0 = x^2 (Ax^2 + Bx + C)$

2) sinüs veya kosinüs fonks. u. : $\begin{cases} g(x) = \sin \beta x \text{ (veya } g(x) = \cos \beta x) \\ \text{seçilmedi ise,} \end{cases}$

* " $\pm i\beta$ KD. m kökü değil" $\Rightarrow y_0 = \underline{A \sin \beta x + B \cos \beta x}$

* " $\pm i\beta$ " = k-katlı kök" $\Rightarrow y_0 = x^k (\quad)$

3) Üstel fonksiyon : $\begin{cases} g(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x \text{ (veya } g(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x) \\ \text{seçilmedi ise, (üstel ism } A=0 \text{ durur)} \end{cases}$

* " $\alpha \pm i\beta$ KD m kökü değil" $\Rightarrow y_0 = e^{\alpha x} [A \sin \beta x + B \cos \beta x]$

* " $\alpha \pm i\beta$ KD m k-katlı kök" $\Rightarrow y_0 = x^k e^{\alpha x} [A \sin \beta x + B \cos \beta x]$

NOT $g(x) = \underline{x} \sin x$ için

* " $\pm i$ KD. m kökü değil" $\Rightarrow y_0 = \underline{(Ax+B) \sin x + (Cx+D) \cos x}$
 $\rightarrow A u_1 = Ax+B$ formu getiren $(x^2 \sin x$ olursa $A \rightarrow Ax^2+Bx+C$ olurt)

* " $\pm i$ KD m k-katlı kök" $\Rightarrow y_0 = x^k (\quad)$

Not: Çözümler-Yol göstermeler kontrol amaçlıdır, yazım hatası - eksiklikler vs.. olabilir..
kendi çözümlerinizi mutlaka karşılaştırınız..

Soru 2-3ve 4 de $y' = \frac{dy}{dx} = p$ gösterimini kullanacağız!

Çözümler...

A1. (Bernoulli Denklemi)

$$\begin{aligned} 2y' + y &= \frac{e^x}{y} \\ \Rightarrow y' + \frac{y}{2} &= \frac{e^x}{2y} \quad (1) \end{aligned} \quad \left| \quad y' + p(x)y = q(x)y^n \Rightarrow p(x) = \frac{1}{2}, q(x) = \frac{e^x}{2} \right.$$

(1) denkleminin her iki tarafını y ile çarpalım, daha sonra aşağıdaki dönüşümü yapalım:

$$\Rightarrow yy' + \frac{1}{2}y^2 = \frac{e^x}{2} \quad \left| \quad \begin{aligned} y^2 &= z, z = z(x) \\ 2yy' &= z' \end{aligned} \right.$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}z' + \frac{1}{2}z = \frac{e^x}{2}$	$\Rightarrow z' + z = e^x \quad (\text{lineer denklem})$ her iki tarafı 2 ile çarpıyoruz $\Rightarrow y' + \bar{p}(x)y = \bar{q}(x) \Rightarrow \bar{p}(x) = 1, \bar{q}(x) = e^x$
--	--

Şimdi lineer denklemi, *integrasyon çarpanı bulma metodu* ile çözelim:

$$v = e^{\int \bar{p}(x) dy} = e^{\int dx} = e^x \text{ bulunur.}$$

Şimdi lineer denklemin her iki tarafını $v = e^x$ ile çarpalım:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underbrace{e^x z' + e^x z}_{=(vz)' = (e^x z)'} &= e^{2x} \quad (y \neq 0) \\ &\text{olduğu görülür!} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (e^x z)' = e^{2x}$$

Şimdi son denklemin her iki tarafının integralini alalım:

$$e^x z = \underbrace{\int e^{2x} dx}_{=I_1} =$$

$$I_1 \text{ hesaplanırsa: } I_1 = \frac{1}{2} e^{2x} + c \text{ bulunur.}$$

$$\Rightarrow e^x z = \frac{1}{2} e^{2x} + c \Rightarrow z = e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^{2x} + c \right)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{z=y^2 \text{ idi}} y^2 = \frac{1}{2} e^x + c e^{-x} \quad [\text{Genel Çözüm}]$$

A2. (Birinci Mertebeden Türeve göre Çözilemeyen (Kapalı formda) Denklem / Çarpanlara Ayırma Metodu) $yy' - x^2 y'^2 = 0$

$$yp - x^2 p^2 = 0 \Rightarrow p(y - px^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 & \Rightarrow y' = 0 & (1) \\ y - px^2 = 0 & \Rightarrow y - y'x^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Şimdi (1) ve (2) denklemlerini ayrı ayrı çözelim:

$$(1): y' = 0 \xRightarrow{(1) \text{ in G.Ç.}} y = c_1$$

$$(2): y - y'x^2 = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x^2} dx \quad (y \neq 0) \xRightarrow{(2) \text{ nin G.Ç.}} y = c_2 e^{-1/x}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{(1) \text{ ve } (2) \text{ nin G.Ç. den}} (y - c_1)(y - c_2 e^{-1/x}) = 0 \quad [\text{Çözüm}]$$

A3. (Birinci Mertebeden Türeve göre Çözilemeyen (Kapalı formda) Denklem / Çarpanlara Ayırma Metodu) $xy'^2 + yy' = xy' + y$:

$$xp^2 + yp = xp + y \Rightarrow xp(p-1) + y(p-1) = (p-1)(xp + y) = 0$$

$$(p-1)(xp + y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p=1 \Rightarrow y'=1 & (1) \\ xp + y = 0 \Rightarrow xy' + y = 0 & (2) \end{cases}$$

Şimdi (1) ve (2) denklemlerini ayrı ayrı çözelim:

$$(1) : y' = 1 \xRightarrow{(1) \text{ in G.Ç.}} y = x + c_1$$

$$(2) : xy' + y = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{1}{x} dx \quad (y \neq 0) \Rightarrow$$

$$\ln y = -\ln x + \ln c_2 = \ln \frac{c_2}{x} \xRightarrow{(2) \text{ nin G.Ç.}} y = \frac{c_2}{x}$$

$$\xRightarrow{(1) \text{ ve } (2) \text{ nin G.Ç. den}} (y - x - c_1)(xy - c_2) = 0 \quad [\text{Çözüm}]$$

A4. (Clairaut denklemi) $y = xp + e^p \quad (1) \Rightarrow y = xp + \psi(p).$

Şimdi (1) de $p = p(x)$ olarak düşünüp, denklemin her iki tarafının x -e göre türevini alalım:

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=p} = p + x \frac{dp}{dx} + e^p \frac{dp}{dx} \Rightarrow (x + e^p) \frac{dp}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow (x + e^p = 0) \vee \left(\frac{dp}{dx} = 0 \right) \Rightarrow \text{bu soruda amaç genel çözümü belirlemek}$$

olduğu için $\frac{dp}{dx} = 0$ bölümünden devam edelim.

$$\left. \begin{array}{l} p = c \\ y = xp + e^p \quad (1) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Genel çözüm: } y = cx + e^c$$

$$\left. \begin{array}{l} x + e^p = 0 \\ y = xp + e^p \quad (1) \end{array} \right\} \Rightarrow e^p = -x \Rightarrow p = \ln(-x) \quad (1) \text{ de } y \text{ e} \\ \Rightarrow y = x + x \ln(-x) \quad \text{Tekil çözüm } (x < 0)$$

$$5) \quad y''' + y'' = e^{-x} - 1$$

$$\text{KD. } \lambda^3 + \lambda^2 = 0 \rightarrow \lambda^2(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1, 2 \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$$

$$\begin{array}{l} \text{"0" KD. m ikr-kutlu kls} \\ \text{"-1" " kls} \end{array} \Rightarrow y_0 = Ax e^{-x} + B x^2$$

Derivte gerne kaysp A y B jr bulm

$$y_0' = e^{-x}(-Ax + A) + 2Bx$$

$$y_0'' = e^{-x}(Ax - A - A) + 2B = e^{-x}(Ax - 2A) + 2B$$

$$y_0''' = e^{-x}(-Ax + 2A + A) = e^{-x}(-Ax + 3A)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_0''' + y_0'' &= e^{-x}(-Ax + 3A) + \\ &\quad e^{-x}(Ax - 2A) + 2B \\ &= Ae^{-x} + 2B = e^{-x} - 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = 1 \quad \text{ve} \quad B = -\frac{1}{2} \quad \text{bulm}$$

$$\Rightarrow y_0 = x e^{-x} - \frac{1}{2} x^2 \quad \text{bulm}$$

$$\Rightarrow \text{Genel csm: } y = y_h + y_0 = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + x e^{-x} - \frac{1}{2} x^2$$

$$6) y'' + 4y' + 2y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow y'' + 4y' + 2y = 1$$

$$\Rightarrow \text{KD. : } \lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$\left[\text{VNW Formel: } a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right]$$

$$\Rightarrow y_h = c_1 e^{(-2+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(-2-\sqrt{2})x}$$

$$\text{"0" KD. m. konst. Teil} \Rightarrow y_0 = A$$

$$\text{Deriv. de. yeme konst. re. } 2Ax = 1 \Rightarrow A = 1/2 \text{ bzw. } y_0 = \frac{1}{2}$$

$$(y_0' = y_0'' = 0)$$

$$\Rightarrow \text{Ges. Lsg. } y = y_h + y_0 = c_1 e^{(-2+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(-2-\sqrt{2})x} + 1/2$$

$$7) y'' + 4y' + 6y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow y'' + 4y' + 6y = 1 \Rightarrow \text{KD. } \lambda^2 + 4\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}i$$

$$\Rightarrow y_h = e^{-2x} (c_1 \cos(\sqrt{2}x) + c_2 \sin(\sqrt{2}x))$$

$$\text{"0" KD. m. konst. Teil} \Rightarrow y_0 = A$$

$$\text{Deriv. de. yeme konst. re. } A = 1/6 \text{ bzw.}$$

$$\Rightarrow \text{Ges. Lsg. } y = y_h + y_0 = e^{-2x} (c_1 \cos(\sqrt{2}x) + c_2 \sin(\sqrt{2}x)) + 1/6$$

$$8) y'' - 2y' + 5y = \cos x$$

$$\text{K.D. } \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$$

$$\Rightarrow y_h = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

$$" \pm i " \text{ K.D. m ksb tgl " } \Rightarrow \underline{y_p = A \cos x + B \sin x}$$

Deriv de yeme baxp, A u B gr bulalın

$$y_p' = -A \sin x + B \cos x, \quad y_p'' = -A \cos x - B \sin x \quad \text{du}$$

$$\Rightarrow y_p'' - 2y_p' + 5y_p = (-A - 2B + 5A) \cos x + (-B + 2A + 5B) \sin x = \cos x$$

$$\Rightarrow 4A - 2B = 1 \quad \text{ve} \quad 2A + 4B = 0 \quad \text{bulun}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{2}A, \quad 4A + A = 5A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{5}, \quad B = -\frac{1}{10} \quad \text{bulun}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{5} \cos x - \frac{1}{10} \sin x \quad \text{bulun}$$

$$\Rightarrow \text{Genel cöz. } y = y_h + y_p = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{5} \cos x - \frac{1}{10} \sin x$$