Diferansiyel Denklemler I

(Astronomi ve Uzay Bilimleri Böl.)

Arasınav Hazırlık Soruları 19.10.2017

SORU. *Aşağıda verilen denklemlerin; "hangi tip denklem olduklarını (nedenleri ile belirterek) belirleyiniz! "yanlarında koşul var ise, istenen koşulu sağlayan çözümünü", "koşul yok ise, genel çözümlerini ve çözümün geçerli olduğu değişkenlerin tanım aralıklarını da vererek" bulunuz.*

1. $xy' = e^{y} + 2y'$	**5.** $(xe^{y} + x)dy + (e^{y} + y)dx = 0$
2. $(x+y)y' = x - y$	**6.** $dy + (y-1)\cos x\, dx = 0$
3. $y' = \dfrac{y}{x - \sqrt{xy}}$	**7.** $(x\cos y - \sin^2 y)dy - \sin y\, dx = 0$
4. $y' = x^2 e^{y - x^3}$, $y(0) = 0$	**8.** $y' - \dfrac{1}{x}y = \ell nx$

Not: Çözümler-Yol göstermeler kontrol amaçlıdır, yazım hatası - eksiklikler vs.. olabilir..
kendi çözümlerinizle mutlaka karşılaştırınız..

Çözümler...

Önbilgi .1 *(İntegrasyon Çarpan Araştırması)*

Tablo (soru 6 ve soru 7 için)

$M\,dx + N\,dy = 0$ *Denk. için* μ *İntegrasyon Çarpanı Araştırması*

	Koşullar	integrasyon çarpanı	Açıklamalar
1	$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi(x)$	$\mu = \mu(x) = e^{\int \varphi(x)\,dx}$	$\varphi(x)$ (yalnızca x-e bağlı) bir fonksiyon
2	$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \varphi(y)$	$\mu = \mu(y) = e^{\int \varphi(y)\,dy}$	$\varphi(y)$ (yalnızca y-ye bağlı) bir fonksiyon

Not.

1.durum: yalnızca x-e bağlı;
2.durum: yalnızca y-ye bağlı;
} : integrasyon çarpanı araştırmalarında kullanılacaktır!

.....

1. (Değişkenlerine Ayrılabilir denklem)

$$xy' = e^{y} + 2y' \quad \Rightarrow \quad \int e^{-y}\,dy = \int \frac{1}{x-2}\,dx \quad , \; x \neq 2$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Rightarrow \quad -e^{-y} = \left(\ell n\left|x-2\right|\right) + c & \text{[Genel Çözüm]} \\ I: \; x \neq 2 & \end{array}}$$

2. (Homojen denklem)

$p\,dx + q\,dy = 0$ yazımından; $p(x,y) = y - x$, $q(x,y) = x + y$ fonksiyonları 1.dereceden homojendirler (*gözlemleyiniz!*). $y' = \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{1-y/x}{1+y/x}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y}{x} = u, \; y = xu \; , \; u = u(x) \\ \qquad y' = \dfrac{1-u}{1+u} \end{array}\right\} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{x\text{-e göre türev}} \quad y' = u + xu' = \frac{1-u}{1+u}$$

$$\Rightarrow \quad xu' = \frac{1-u}{1+u} - u \quad \Rightarrow \quad -\int \frac{1+u}{u^2+2u-1}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$(x \neq 0 \, , \; u^2 + 2u \neq 1)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ell n\left|u^2+2u-1\right| = \ell n\left|x\right| - \frac{1}{2}\ell n\left|c\right|$$

$$\Rightarrow \quad u^2 + 2u - 1 = \frac{c}{x^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underbrace{\Rightarrow}_{u=\frac{y}{x}\text{ idi}} \quad \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \dfrac{2y}{x} - 1 = \dfrac{c}{x^2} & \text{[Genel Çözüm]} \\ I: \; x \neq 0 \, , \; y^2 + 2xy \neq x^2 & \end{array}}$$

3. (Homojen denklem)

$p\,dx + q\,dy = 0$ yazımından; $p(x,y) = -y$, $q(x,y) = x - \sqrt{xy}$ fonksiyonları 1.mertebeden homojendirler (*gözlemleyiniz!*). $y' = \dfrac{y}{x - \sqrt{xy}} = \dfrac{y/x}{1 - \sqrt{y/x}}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y}{x}=u,\ y=xu\ ,\ u=u(x) \\ \\ y'=\dfrac{u}{1-\sqrt{u}} \end{array}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{x\text{-e göre türev}} \quad y'=u+xu'=\frac{u}{1-\sqrt{u}}$$

$$\Rightarrow \quad xu'=\frac{u}{1-\sqrt{u}}-u$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\int \frac{1-\sqrt{u}}{u\sqrt{u}}\,du}_{=I_1}=\int \frac{1}{x}\,dx \qquad (x\neq 0,\ u\neq 0)$$

I_1 integralini hesaplayalım:

$$I_1=\int \frac{1}{u\sqrt{u}}\,du-\int \frac{1}{u}\,du$$

$$=\int u^{-3/2}\,du-\int \frac{1}{u}\,du$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{u}}-\ell n\,|u|+k_1$$

$$\Rightarrow \ -\frac{2}{\sqrt{u}}-\ell n\,|u|=\ell n\,|x|+\ell n\,|c| \ \Rightarrow \ -\frac{2}{\sqrt{u}}=\ell n\,|cxu|$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{u=\frac{y}{x}\text{ idi}} \quad -\frac{2}{\sqrt{y/x}}=\ell n\,|cy| \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

$$I:\ x\neq 0,\ \ y\neq 0$$

4. (Değişkenlerine Ayrılabilir denklem)

$$y'=x^2e^ye^{-x^3} \ \Rightarrow \ \int e^{-y}\,dy=\int x^2e^{-x^3}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad -e^{-y}=-\frac{1}{3}e^{-x^3}+c \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

$$I:\ -\infty<x<\infty$$

Şimdi denklemin verilen koşulundan sağlayan çözümünü bulalım.

$$\left.\begin{array}{c} y(0)=0 \\ \text{yani } x=0 \text{ için } y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{genel çözümden: } -1=-\frac{1}{3}+c \ \Rightarrow \ c=-\frac{2}{3}$$

O halde istenilen çözüm : $3e^{-y} = 2 + e^{-x^3}$

5. (Tam Diferansiyel denklem) $(xe^y + x)dy + (e^y + y)dx = 0$ için $M\,dx + N\,dy = 0$ yazımından:

$$\left.\begin{array}{l} M = e^y + y \\ N = xe^y + x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = e^y + 1 = \frac{\partial N}{\partial x}\ ,$$

$\Rightarrow$ Denklem: Tam Dif.Denklemdir.

(Denklemin Tam Dif.Denk. olabilmesi için $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ şartı sağlanmalıdır)

Şimdi Tam Dif. Denk. in çözümünü bulalım:

$du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$	
$u = \int M\,dx + f(y)$ $= \int (e^y + y)dx + f(y)$ $= xe^y + xy + f(y)$ ...(5-i)	$u = \int N\,dy + g(x)$ $= \int (xe^y + x)dy + g(x)$ $= xe^y + xy + g(x)$ ...(5-ii)

(5-i) ve (5-ii) den: $g(x) = 0$, $f(y) = 0$ bulunur. $\Rightarrow$ $u = xe^y + xy$ olur. Genel Çözüm $u = c$ idi.

$\Rightarrow$ $xe^y + xy = c$ [**Genel Çözüm**]

$I: -\infty < x < \infty$

6. **(**İntegrasyon Çarpanı ile Tam Diferansiyel hale getirilebilen denklem**)**

$dy+(y-1)\cos x\,dx=0$ için $\bar{M}\,dx+\bar{N}\,dy=0$ yazımından:

$$\left.\begin{aligned}\bar{M}&=y\cos x-\cos x\\ \bar{N}&=1\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial\bar{M}}{\partial y}=\cos x\neq 0=\frac{\partial\bar{N}}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Denklem: Tam Dif. DEĞİL!

Ancak denklem, "integrasyon çarpanı " ile Tam Dif. denklem haline getirilebilir mi? inceleyelim!

$$\frac{\dfrac{\partial\bar{M}}{\partial y}-\dfrac{\partial\bar{N}}{\partial x}}{\bar{N}}=\frac{\cos x-0}{1}=\cos x$$

yalnızca x-e bağlı bir fonksiyon elde edildi. O halde Önbilgi1 den

$$\mu(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial\bar{M}}{\partial y}-\frac{\partial\bar{N}}{\partial x}}{\bar{N}}dx}=e^{\int\cos x\,dx}=e^{\sin x}$$

$\Rightarrow$ intergrasyon çarpanı: $\mu(x)=e^{\sin x}$.

Şimdi denklemin her iki tarafını $\mu(x)=e^{\sin x}$ ile çarpalım ve denklemin Tam Dif. Denk. haline geldiğini kontrol edip, çözelim.

$$\Rightarrow\quad e^{\sin x}dy+(y-1)\cos x\,e^{\sin x}\,dx=0$$

Bu son denklem için $M\,dx+N\,dy=0$ yazımından:

$$\left.\begin{aligned} M &= (y-1)\cos x\, e^{\sin x} \\ N &= e^{\sin x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \cos x\, e^{\sin x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Denklem: Tam Dif.

$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$	
$u = \int M\,dx + f(y)$ $= \underbrace{\int (y-1)\cos x\, e^{\sin x}\,dx}_{=I_1} + f(y)$ $= (y-1)e^{\sin x} + f(y) \quad \ldots$(6-i)	$u = \int N\,dy + g(x)$ $= \int e^{\sin x}\,dy + g(x)$ $= ye^{\sin x} + g(x) \quad \ldots$(6-ii)

(I_1 için $\sin x = t$ dönüşünü yapılarak; $I_1 = (y-1)\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx = (y-1)\int e^t\,dt$ şeklinde bulunur (*inceleyiniz*!).)

(6-i) ve (6-ii) den: $g(x) = -e^{\sin x}$, $f(y) = 0$ bulunur.

$\Rightarrow$ $u = ye^{\sin x} - e^{\sin x} = (y-1)e^{\sin x}$ olur. Genel Çözüm $u = c$ idi.

$$\Rightarrow \quad (y-1)e^{\sin x} = c \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

$$I: -\infty < x < \infty$$

7. **(**İntegrasyon Çarpanı ile Tam Diferansiyel hale getirilebilen denklem**)**

$(x\cos y - \sin^2 y)dy - \sin y\,dx = 0$ için $\bar{M}\,dx + \bar{N}\,dy = 0$ yazımından:

$$\left.\begin{aligned} \bar{M} &= -\sin y \\ \bar{N} &= x\cos y - \sin^2 y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \bar{M}}{\partial y} = -\cos y \neq \cos y = \frac{\partial \bar{N}}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Denklem: Tam Dif. DEĞİL!

Ancak denklem, "integrasyon çarpanı " ile Tam Dif. denklem haline getirilebilir mi? inceleyelim!

$$\frac{\dfrac{\partial \bar{M}}{\partial y}-\dfrac{\partial \bar{N}}{\partial x}}{-\bar{M}}=\frac{-\cos y-\cos y}{\sin y}=-\frac{2\cos y}{\sin y}=-2\cot y$$

yalnızca y-ye bağlı bir fonksiyon elde edildi. O halde Önbilgi1 den

$$\mu(y)=e^{\int \frac{\frac{\partial \bar{M}}{\partial y}-\frac{\partial \bar{N}}{\partial x}}{-\bar{M}}dy}=e^{-\int 2\cot y\, dy}=e^{-2\ell n(\sin y)}=\frac{1}{\sin^2 y}$$

$\Rightarrow$ intergrasyon çarpanı: $\mu(y)=\dfrac{1}{\sin^2 y}$.

Şimdi denklemin her iki tarafını $\mu(y)$ ile çarpalım ve denklemin Tam Dif. Denk. haline geldiğini kontrol edip, çözelim:

$$\Rightarrow \quad (\frac{x\cos y}{\sin^2 y}-1)dy-\frac{1}{\sin y}\,dx=0 \qquad (\sin y\neq 0)$$

Bu son denklem için $M\,dx+N\,dy=0$ yazımından:

$$\left.\begin{aligned} M&=-\frac{1}{\sin y}\\ N&=\frac{x\cos y}{\sin^2 y}-1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\cos y}{\sin^2 y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Denklem: Tam Dif.

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$u=\int M\,dx+f(y)$ $=-\int \frac{1}{\sin y}dx+f(y)$ $=-\frac{x}{\sin y}+f(y)$ $\quad\ldots$(7-i)	$u=\int N\,dy+g(x)$ $=\int (\frac{x\cos y}{\sin^2 y}-1)dy+g(x)$ $=-y+x\underbrace{\int \frac{\cos y}{\sin^2 y}dy}_{=I_1}+g(x)$ $=-y-\frac{x}{\sin y}+g(x)\ldots$(7-ii)

(I_1 için $\sin y=t$ dönüşünü yapılarak; sonuçta $I_1=-\frac{1}{\sin y}+k_1$ bulunur (*inceleyiniz*!).)

(7-i) ve (7-ii) den: $g(x)=0$, $f(y)=-y$ bulunur.

$\Rightarrow$ $u=-y-\frac{x}{\sin y}$ olur. Genel Çözüm $u=-c$ idi.

$$\Rightarrow \quad y+\frac{x}{\sin y}=c \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

$$I:\ y\neq n\pi\ ,n=0,\mp 1,\ldots$$

8. (Lineer Diferansiyel denklem)

$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=\ell nx$	$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)\ \Rightarrow\ p(x)=-\frac{1}{x},\ q(x)=\ell nx$

integrasyon çarpanı bulma metodu ile çözelim:

$$v=e^{\int p(x)dx}=e^{-\int \frac{1}{x}dx}=e^{-\ell nx}=\frac{1}{x} \text{ bulunur.}$$

Şimdi lineer denklemin her iki tarafını $v=\frac{1}{x}$ ile çarpalım:

Arasınav Hazırlık Soruları

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y}_{=(vy)'=\left(\frac{1}{x}y\right)'} = \frac{\ell nx}{x} \quad (x \neq 0)$$

oldugu görülür!

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{x}y\right)' = \frac{\ell nx}{x}$$

Şimdi son denklemin her iki tarafının integralini alalım:

$$\frac{1}{x}y = \underbrace{\int \frac{1}{x}\ell nx\,dx}_{=I_1}$$

I_1 hesaplanırsa: $I_1 = \frac{1}{2}\ell n^2 x + \frac{1}{2}c$ bulunur (*inceleyip, ara işlemleri yapınız*!).

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x}y = \frac{1}{2}\ell n^2 x + c$$

$$\Rightarrow \quad y = x\left(\frac{1}{2}\ell n^2 x + c\right) \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

$I: \; x > 0$