Diferansiyel Denklemler II

Çalışma Soruları –1 10.03.2014

A. *Aşağıda verilen denklemlerin; "mertebe düşürme metodu kullanarak, hangi sınıflandırmaya ait olduğunu belirleyiniz! " yanlarında koşul var ise, istenen koşulu sağlayan çözümünü", "koşul yok ise, tüm çözümlerini bulunuz.*

1. $y'' = xy'^3 \;,\; y(0)=0 \;,\; y'(0)=-1$	**5.** $y'' = e^{2y}$
2. $y''\cos x = y'$	**6.** $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$
3. $y'' = y \;\;,\; y(0)=1 \;,\; y'(0)=1$	**7.** $y'' - 2xy' = 2y \,,\; y(0)=2 \,,\; y'(0)=1$
4. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$	**8.** $x^3y'y'' - x^2yy'' - x^2y'^2 + 2xyy' = x^2 + y^2$

B. $x^3y'' + y'^3 = 0$ *denklemini mertebe düşürme metodu kullanarak, hangi sınıflandırmaya ait olduğunu belirleyiniz! denklemin çözümünü veren içinde yalnızca bir tane integral işleminin olduğu integral denklemine kadar indirgeyiniz.*

Not: Çözümler-Yol göstermeler kontrol amaçlıdır, yazım hatası - eksiklikler vs.. olabilir..
kendi çözümlerinizle mutlaka karşılaştırınız..

Çözümler...

(son güncelleme : 10.03.2015)

İki veya daha yüksek mertebeden Dif. Denk. için: Mertebe düşürme yöntemi

***S**ınıflandırmaları*

S-A. $F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)=0$: En genel formda *n*.mertebeden Adi Dif.Denk.

S-A1.

$F\left(x,ty,ty',...,ty^{(n)}\right)=t^m F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)$ özelliğine sahip } : Aranan fonks ve türevlerine göre HOMOJEN

$\Downarrow$

$y=e^{\int z dx}$ $\left(z=z(x)\right)$ dönüşümü yapılır.

S-A2.

$F\left(tx,t^k y,t^{k-1}y',...,t^{k-n}y^{(n)}\right)=t^m F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)$ özelliğine sahip } : Genelleştirilmiş HOMOJEN

$\Downarrow$

$x=e^t$ $\left(\text{yani, } t=\ell nx\right)$, $y=ze^{kt}$ dönüşümü yapılır.
$\left(z=z(t)\right.$:yeni aranan fonks., t : yeni bağımsız değişken$\left.\right)$

S-A3. $F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)=\dfrac{d}{dx}\phi\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)$ şeklinde yazılabilen ϕ mevcut

S-B.

$F\left(x,y',...,y^{(n)}\right)=0$
Aranan fonksiyonu içermeyen

} $y'=\dfrac{dy}{dx}=z$, $y''=\dfrac{dz}{dx}=z'$,...,
$y^{(n)}=z^{(n-1)}$ dönüşümü yapılır $\left(z=z(x)\right)$.

S-B1. $y^{(n)}=f(x)$: ard-arda *n* kez integralini alarak çözüm elde edilir.

S-B2. $y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}\right)$: $y^{(n-1)} = z$ dönüşümü yapılır $\left(z = z(x)\right)$.

S-B3. $y^{(n)} = f\left(y^{(n-2)}\right)$: önce $y^{(n-2)} = z$ dönüşümü yapılır $\left(z = z(x)\right)$.

$\Rightarrow y^{(n)} = \dfrac{d^2}{dx^2} y^{(n-2)} = \dfrac{d^2 z}{dx^2} = z''$ olur

$\Rightarrow\ z'' = f(z)$ denklemi elde edilir.

$\Rightarrow\ d(z') = f(z)dx$, her taraf $2z'$ ile çarpılır

$\Rightarrow \underbrace{2z'd(z')}_{=d\left((z')^2\right)} = 2\ \underbrace{z'}_{=\frac{dz}{dx}}\ f(z)dx$

$\underset{\text{integral işlemi}}{\Rightarrow}\quad z'^2 = 2\int f(z)dz + c_1 \ \Rightarrow\ z' = \mp\sqrt{2\int f(z)dz + c_1}$ (Değiş.Ayr.)

$\Rightarrow\ \mp\int \dfrac{1}{\sqrt{2\int f(z)dz + c_1}} = x + c_2$ şeklinde devam edilerek çözüm aranır.

S-C.

$$\left.\begin{array}{l} F\left(y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0 \\ \text{Bağımsız değişkeni içermeyen} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y' = \dfrac{dy}{dx} = p \ , \text{ dönüşümü yapılır.} \\ y'' = \dfrac{d^2 z}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\underbrace{\dfrac{dy}{dx}}_{=p} = p\underbrace{\dfrac{dp}{dy}}_{=p'} = pp' \ , \ldots \end{array}$$

ÇözümA1. S-B den çözebiliriz: $y' = \dfrac{dy}{dx} = z$, $y'' = \dfrac{dz}{dx} = z'$

$\Rightarrow\ z' = xz^3$ (z ile x arasında denk.) (değiş.ayr.)

$$\frac{1}{z^3}dz = xdx \ \Rightarrow\ -\frac{1}{2z^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{c_1}{2} \ \Rightarrow -\frac{1}{2z^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{c_1}{2} \ \Rightarrow\ z^2 = -\frac{1}{x^2 + c_1}$$

$$\Rightarrow\ z = \mp\sqrt{-\frac{1}{x^2 + c_1}} \quad \ldots (1) \text{ elde edilir.}$$

Başlangıç koşullarından önce c_1 i bulup sonra çözüme devam edelim.

$$\left.\begin{array}{c} y(0) = 0\ ,\ y'(0) = -1 \\ \text{yani } x = 0 \text{ için } y = 0\ ,\ y' = -1 \end{array}\right\} \ \Rightarrow\quad -1 = \mp\sqrt{-\frac{1}{0 + c_1}}$$

eşitliğin sağ tarafının " – " olması durumunda $c_1 = -1$ bulunur. O halde (1) denkleminde c_1 yerine yazılarak denklemin sağ tarafı "–" olan parçasından çözüme devam edilir.

$z = y' = -\sqrt{\dfrac{1}{1-x^2}} \Rightarrow y = -\arcsin(x) + c_2$. Başlangıç koşullarından c_2 yi bulalım.

$0 = c_2 - \arcsin 0 \Rightarrow c_2 = 0$ bulunur.

O halde istenilen çözüm : $y = -\arcsin x$

ÇözümA2. S-B den çözebiliriz: $y' = \dfrac{dy}{dx} = z$, $y'' = \dfrac{dz}{dx} = z'$

$\Rightarrow z' \cos x = z$ (z ile x arasında denk.)(değiş.ayr.)

$(z \neq 0)$ $\dfrac{1}{z}dz = \dfrac{1}{\cos x}dx \Rightarrow \ell n|z| = \ell n\left|\dfrac{1}{\cos x} + \tan x\right| + \ell n|c_1| \Rightarrow$

$z = y' = c_1\left(\dfrac{1}{\cos x} + \tan x\right)$

$\Rightarrow dy = c_1\left(\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right)dx$

$$\int \frac{1+\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{(\cos x)(1-\sin x)}dx = \int \frac{\cos^2 x}{(\cos x)(1-\sin x)}dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin x}dx$$

$$= -\ell n|1-\sin x| + k_1$$

$\underbrace{\Rightarrow}_{c_2 = c_1 k \text{ diyelim}}$ $y = c_2 - c_1 \ell n|1-\sin x|$ [Genel Çözüm]

ÇözümA3. S-C den S-A1 den veya S-B3 den çözebiliriz: $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$,

$y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy} = pp'$

$\Rightarrow pp' = y$ (p ile y arasında denk.)(değiş.ayr.)

$pdp = ydy \Rightarrow \dfrac{p^2}{2} = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{c_1}{2} \Rightarrow p = \mp\sqrt{c_1 + y^2}$ ... (2) elde edilir.

Başlangıç koşullarından önce c_1 i bulup sonra çözüme devam edelim.

$$\left.\begin{array}{c} y(0)=1\ ,\ y'(0)=1 \\ \text{yani } x=0 \text{ için } y=1\ ,\ y'=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 1=\mp\sqrt{c_1+1}$$

eşitliğin sağ tarafının " + " olması durumunda $c_1=0$ bulunur. O halde (2) denkleminde c_1 yerine yazılarak denklemin sağ tarafı "+" olan parçasından çözüme devam edilir.

$$\Rightarrow \quad p=\frac{dy}{dx}=\sqrt{0+y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}dy=dx \quad \Rightarrow \quad \ell ny=x+\ell nc_2 \quad \Rightarrow \quad y=c_2e^x$$

Başlangıç koşullarından c_2 yi bulalım.

$1=c_2e^0 \Rightarrow c_2=1$ bulunur.

O halde istenilen çözüm : $y=e^x$

Çözümler.

$xyy'' + xy'^2 = 2yy'$

6/10

(A1) Homojen $\begin{cases} xyy'' \to t^2 xyy'' \\ xy'^2 \to t^2 xy'^2 \\ 2yy' \to t^2(2yy') \end{cases} \Rightarrow \underline{m=2}$, [$F = xyy'' + xy'^2 - 2yy'$ 2. mertebeden Homojen fonk.]

[$y = e^{\int z\,dx}$ $(z = z(x))$] $\Rightarrow \underline{y' = zy}$, $\underline{y'' = y(z' + z^2)}$ [Gıkarılışını yapınız]

$\Rightarrow$ $xy^2(z^2 + z') + xy^2z^2 = 2y^2z$

$\Rightarrow$ $x(z^2 + z') + xz^2 = 2z$ ($y=0$ çözümdür)

y^2'ye bölelim $(y \neq 0)$

$\Rightarrow$ $z' - \frac{2}{x}z = -2z^2$ (Bernoulli)

$\Rightarrow$ $\frac{1}{z^2}z' - \frac{2}{x}z^{-1} = -2$ $\begin{cases} z^{-1} = w \text{ diyelim} \\ -\frac{1}{z^2}z' = w' \end{cases}$

$\Rightarrow$ $w' + \frac{2}{x}w = 2$ (lineer) İntegrasyon çarpanı: $e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2$

$\Rightarrow$ $\underbrace{x^2w' + 2xw}_{= \frac{d}{dx}(x^2 \cdot w)} = 2x^2$ $\Rightarrow$ $x^2w = \int 2x^2\,dx + \frac{c_1}{3}$ (integral)

$\Rightarrow w = \left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{c_1}{3}\right) = \frac{2x^3 + c_1}{3x^2}$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{y}dy = \frac{3x^2}{2x^3 + c_1}$

$\Rightarrow$ (integral) $\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|2x^3 + c_1| + \frac{1}{2}\ln|c_2|$

$\Rightarrow$ $y^2 = \underbrace{2c_2}_{=c_1}x^3 + \underbrace{c_1c_2}_{c_2 \text{ dıyelim}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{y^2 = c_1x^3 + c_2}$ G.Ç.

Çözüm A5.

$y'' = e^{2y}$

(C) den çözebiliriz.

$$\begin{cases} y' = \frac{dy}{dx} = p \\ y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=p} = pp' \end{cases}$$

$$\Rightarrow pp' = e^{2y} \Rightarrow p\,dp = e^{2y}dy \Rightarrow \frac{p^2}{2} = \frac{e^{2y}}{2} + \frac{c_1}{2}$$

$$\Rightarrow p^2 = e^{2y} + c_1$$

$$\Rightarrow p = \mp\sqrt{e^{2y}+c_1} \Rightarrow \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{e^{2y}+c_1}}\,dy}_{=I_1} = \mp dx$$

I_1 için $e^{2y}+c_1 = u^2$ dönüşümü yapılır $\Rightarrow 2e^{2y}dy = 2u\,du \Rightarrow dy = \frac{u}{e^{2y}}du = \frac{u}{u^2-c_1}$

$$\Rightarrow I_1 = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{u}{u^2-c_1}du = \int \frac{1}{u^2-c_1}du$$

$$= \sqrt{c_1}\arcsin\left(\frac{u}{\sqrt{c_1}}\right) + k_1 \quad [c_1 > 0 \text{ durumu için}]$$

$$\Rightarrow \arcsin\sqrt{\frac{e^{2y}+c_1}{c_1}} = \mp\frac{x+c_1}{\sqrt{c_1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\left(\mp\frac{x+c_2}{\sqrt{c_1}}\right) = \sqrt{\frac{e^{2y}+c_1}{c_1}}} \quad \text{Ç.Ç.}$$

Çözüm A6.

$$yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$$

(A1) Homojen denklem çözülebilir

$$\begin{cases} yy'' \to (ty)(ty'') = t^2 y y'' \text{ nun derecesi: } 2 \\ y'^2 \to t^2 y'^2 \text{ nin derecesi: } 2 \\ 15y^2\sqrt{x} \to t^2(15y^2\sqrt{x}) \text{ nin derecesi: } 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{m=2}$$

$\left[y = e^{\int z\,dx} \quad (z = z(x)) \right] \Rightarrow \underline{y' = zy}$, $\underline{y'' = y(z' + z^2)}$ [Çıkarılışını yapınız]

dönüşümü yapılacak

$\Rightarrow$ Denklemde yerine yazalım

$$yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$$
$$y^2(z' + z^2) = y^2 z^2 + 15y^2\sqrt{x}$$

$\Rightarrow$ y^2 ye bölelim

$$z' = 15\sqrt{x} \quad \text{(Değiş. Atm.)} \Rightarrow \underbrace{z}_{=\frac{y'}{y} \text{ idi}} = 10x^{3/2} + c_1 \quad (\underline{y \neq 0 \text{ çözümdür}})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = (10x^{3/2} + c_1)\,dx \Rightarrow \ln|y| = 4x^{5/2} + c_1 x + \ln|c_2|$$

$$\Rightarrow \boxed{y = c_2 e^{(4x^{5/2} + c_1 x)}} \quad \text{G.Ç}$$

Çözüm A7.

$$y'' - 2xy' = 2y \qquad "y(0) = 2,\ y'(0) = 0"$$

$$y'' - 2xy' - 2y = \frac{d}{dx}(y' - 2xy) = 0 \Rightarrow y' - 2xy = c_1$$

Başlangıç-k. dan c_1 i bulup devam edelim:

$$\begin{cases} x = 0 \text{ için } y = 2,\ y' = 0 \\ 0 - 2(0)\,2 = c_1 \Rightarrow \underline{c_1 = 0} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $y' - 2xy = 0$ (Değiş.Atm.) $\Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = 2x\,dx \Rightarrow \ln|y| = x^2 + \ln|c_2|$

$\Rightarrow y = c_2 e^{x^2}$

Şimdi c_2 yi bulalım:

$$2 = c_2 \underbrace{e^{0^2}}_{=1} \Rightarrow c_2 = 2$$

$\Rightarrow$ İstenilen çözüm: $\boxed{y = 2e^{x^2}}$

GOLMAB.

SORU $x^3y'y'' - x^2yy'' - x^2y'^2 + 2xyy' = x^2+y^2$

Genelleştirilmiş Homojen diferansiyel $k=1$ olduğu görülür (Gösteriniz!)

O halde

$x = e^t$ $(t=\ln x)$, $y = ze^t$ dönüşümü yapalım $\Rightarrow$

$$y' = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = e^{-t}\cdot e^t(z+\dot z) = z+\dot z$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = e^{-t}(\dot z + \ddot z)$$

$\Rightarrow$ $(z+\dot z)(\dot z+\ddot z) - z(\dot z+\ddot z) - (z+\dot z)^2 + 2z(z+\dot z) = 1+z^2$

$\Rightarrow$ $\dot z\ddot z = 1$ denklemi elde edilir. $\dot z = p$ diyelim

$\Rightarrow$ $p\dot p = 1 \Rightarrow p\,dp = dt \Rightarrow \frac{p^2}{2} = t + \frac{c_1}{2}$

$\Rightarrow$ $\dot z^2 = 2t + c_1$ $\Rightarrow$ $\dot z = \mp\sqrt{2t+c_1}$ $\Rightarrow$ $dz = \mp\sqrt{2t+c_1}\,dt$

$\Rightarrow$ $z = \mp\frac{1}{3}(2t+c_1)^{3/2} + c_2$ bulunur.

$t = \ln x$, $z = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow$ $\frac{y}{x} = \mp\frac{1}{3}(2\ln|x| + c_1)^{3/2} + c_2$

Ejemplo 3 $x^3y'' + y'^3 = 0$

(B) Ecuaciones diferenciales. $\begin{cases} y' = z \\ y'' = \frac{dz}{dx} = z' \end{cases}$

$\Rightarrow x^3 z' + z^3 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{z^3}dz = \frac{1}{x^3}dx$ $(z \neq 0)$

$[z = 0 \Rightarrow y = C$ Constante$]$

$\Rightarrow$ Integrando $\frac{1}{2z^2} = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}C_1$

$\Rightarrow z^2 = \frac{x^2}{C_1x^2 - 1} \Rightarrow z = \mp\frac{x}{\sqrt{C_1x^2 - 1}}$, $z = y' = \frac{dy}{dx}$; dx

$\Rightarrow \int dy = \mp\int \frac{x}{\sqrt{C_1x^2 - 1}}dx$

$$\boxed{\mp y = \int \frac{x}{\sqrt{C_1x^2 - 1}}dx + C_2}$$