

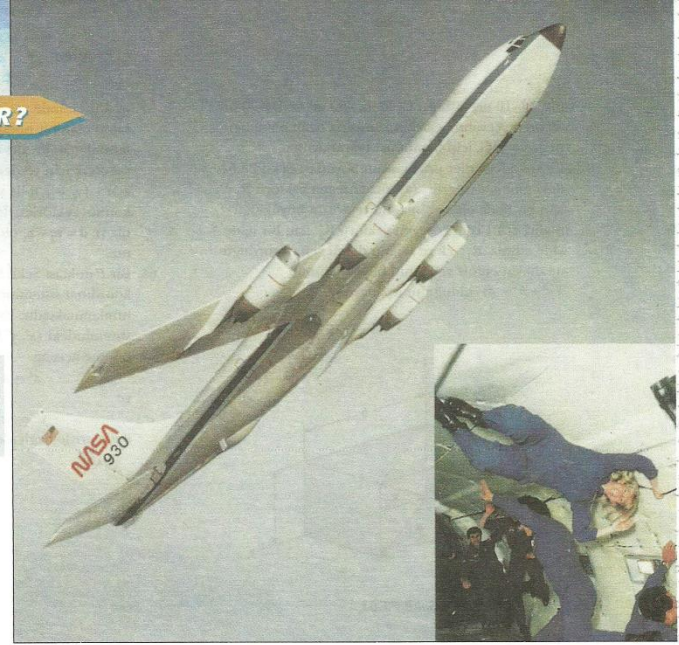
İki Boyutta Hareket

SİZCE NEDİR?

Bu uçak NASA tarafından astronot eğitimi amacı ile kullanılmaktadır. Uçak, belirli bir eğri yol boyunca uçarken, uçağın içerisinde bağlı olmayan herşey uçuşmaya başlar. Bu ilginç olayın sebebi ne olabilir? (NASA)

web

Bu uçağın nasıl kullanıldığı hakkında daha fazla bilgi için, <http://imocc.imoc.com/~acft-ops/rgpindex.htm> internet adresine giriniz.



b ö l ü m

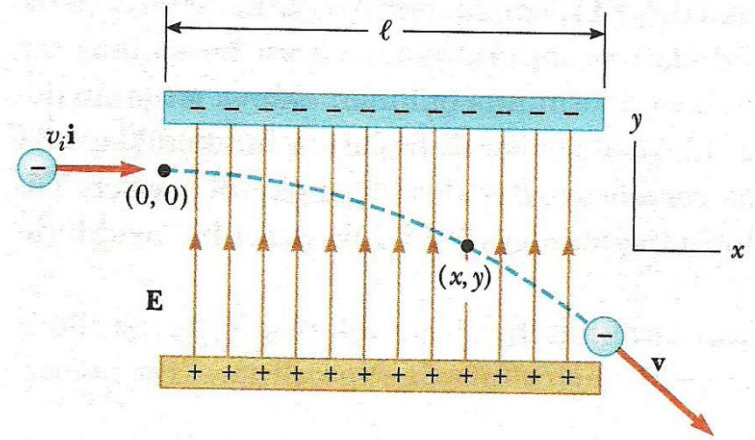
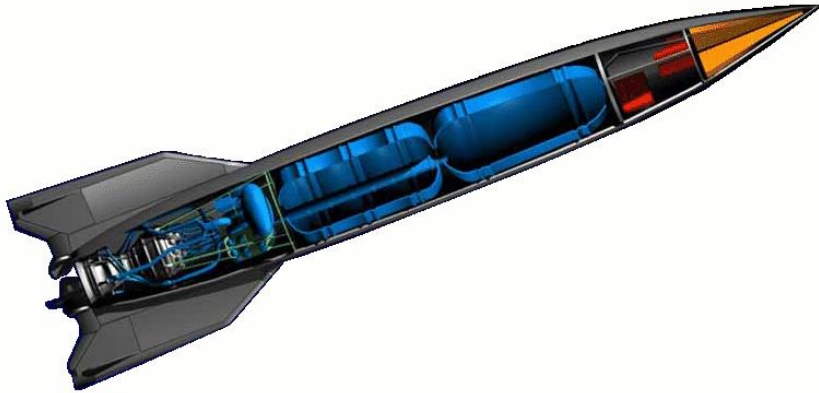
4

İki Boyutta Hareket

Bölüm İçeriği

- | | |
|---|-----------------------------|
| 4.1 Yerdeğiştirme, Hız ve İvme Vektörleri | 4.4 Düzgün Dairesel Hareket |
| 4.2 Sabit İvmeli İki-Boyutlu Hareket | 4.5 Teğetsel ve Radyal İvme |
| 4.3 Eğik Atış Hareketi | 4.6 Bağlı Hız ve Bağlı İvme |

Bu bölümde, iki-boyutta hareket eden bir cismin kinematığı ile ilgileneceğiz. İki boyutlu hareketin özömlenmesi, -sonraki bölömlerde- uyduların yöröngedeki hareketinden, elektronların düzgün bir elektrik alanı içerisindeki hareketine kadar bize geniş bir hareket türünü inceleme olanağı verir. Bu bölöme yerdeğıştirme, hız ve ivmenin vektör tabiatını ayrıntıları ile inceleyerek başlayacağız. Bir-boyutlu harekette yaptığımız gibi, bu üç niceliğın temel tanıtımını yardımcı ile, iki-boyutlu hareketin kinematik denklemlerini türeteceğiz. Daha sonra iki-boyutlu hareketin özel halleri olarak eğik atış hareketini ve düzgün dairesel hareketi ele alacağız. Ayrıca verilen bir parçacığın yerdeğıştirme, hız ve ivmesini farklı referans sistemlerindeki gözlemcilerin niçin farklı ölçebileceğini gösteren bağıl hareket kavramını tartışacağız.



4.1

YERDEĞİŞTİRME, HIZ VE İVME VEKTÖRLERİ

2. Bölümden Hatırlatma

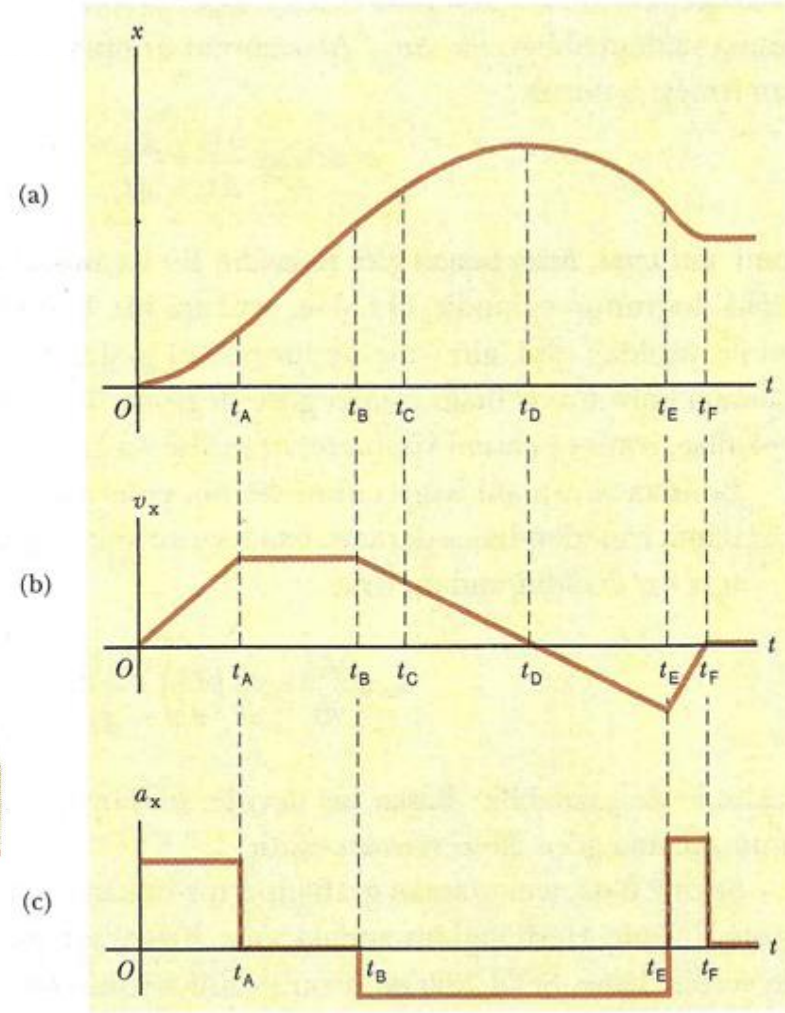
Konumun zamanla değişimi biliniyorsa buradan hareketin tamamını (v ve a yı) belirleyebiliyoruz.

Şimdi aynı durumları 2 boyutlu harekete uygulayalım.

TABLO 2.2 Sabit İvmeli Doğrusal Hareketin Kinematik Denklemleri

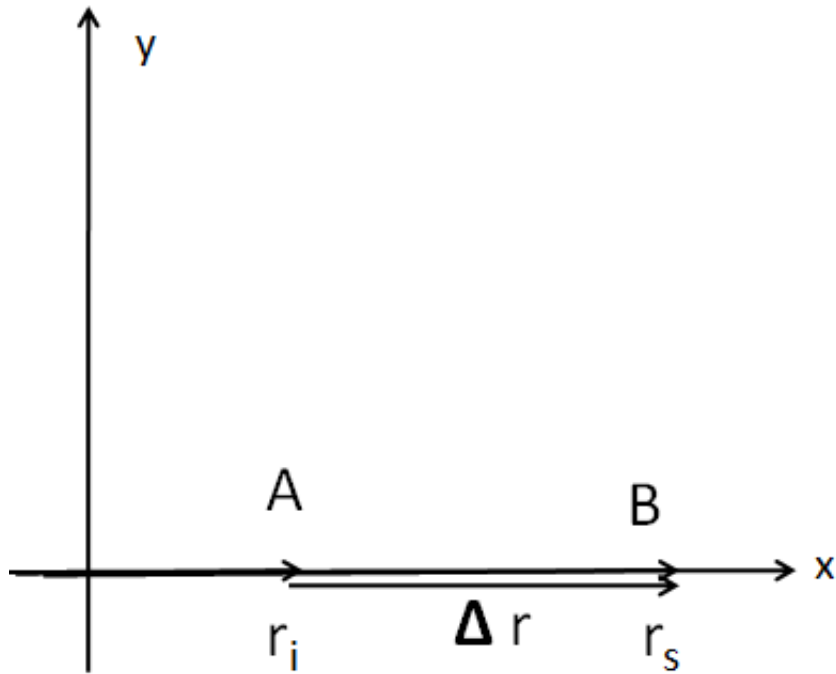
Denklem	Denklem Tarafından Verilen Bilgi
$v_{xs} = v_{xi} + a_x t$	Zamanın fonksiyonu olarak hız
$x_s - x_i = \frac{1}{2} (v_{xi} + v_{xs}) t$	Hızın ve zamanın fonksiyonu olarak yerdeğiştirme
$x_s - x_i = v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	Zamanın fonksiyonu olarak yerdeğiştirme
$v_{xs}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_s - x_i)$	Yerdeğiştirmenin fonksiyonu olarak hız

Not: Hareket x eksenini boyuncadır.



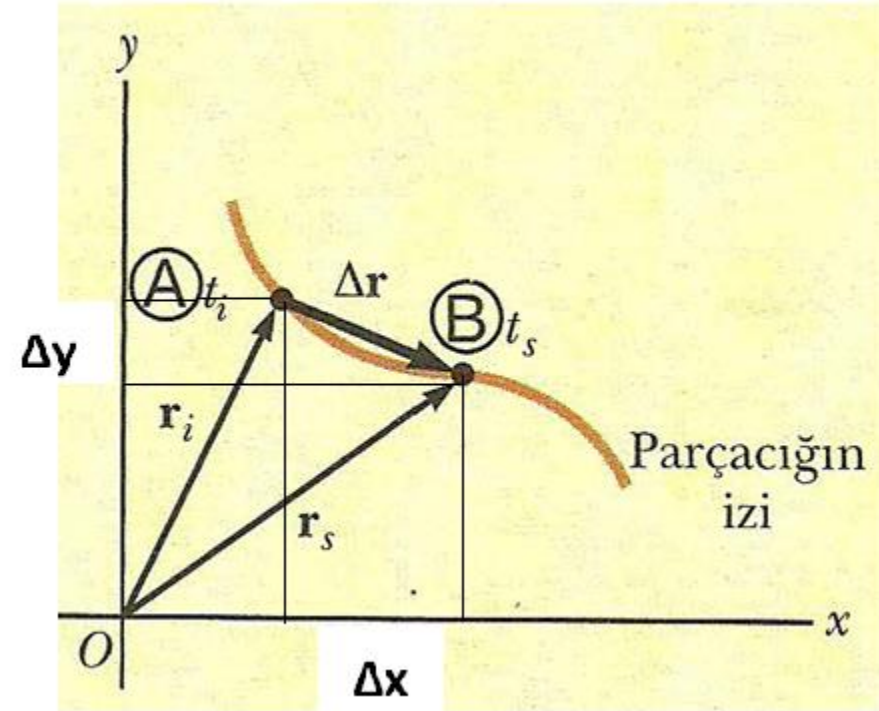
Şekil 2.7 (a) x eksenini boyunca hareket eden bir cismin konum-zaman grafiği. (b) Cismin hız-zaman grafiği, her bir an için konum-zaman grafiğine çizilen teğetin eğiminden elde edilir. (c) Cismin ivme-zaman grafiği, hareketini her anında hız-zaman grafiğinin eğiminden bulunur.

Bir boyutlu Hareket



**Bir Boyutta
Harekette**
 $\Delta r = \Delta x$

İki boyutta Hareket



**İki Boyutta
Harekette**
 $\Delta r = \Delta x + \Delta y$

Ortalama hız

$$\bar{\mathbf{v}} \equiv \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Ani hız

$$\mathbf{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Ortalama ivme

$$\overline{\mathbf{a}} \equiv \frac{\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_i}{t_s - t_i} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

Ani ivme

$$\mathbf{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

İki Boyutta Sabit İvmeli Hareket

İvmenin hem büyüklükçe ve hem de doğrultuca sabit kaldığı, iki boyutlu hareketi ele alalım. Xy düzleminde hareket eden bir parçacık için konum vektörü:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

hız vektörü:

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$$

Zamanın fonksiyonu olarak hız vektörü

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t$$

Zamanın fonksiyonu olarak yer vektörü

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \frac{1}{2} \mathbf{a}t^2$$

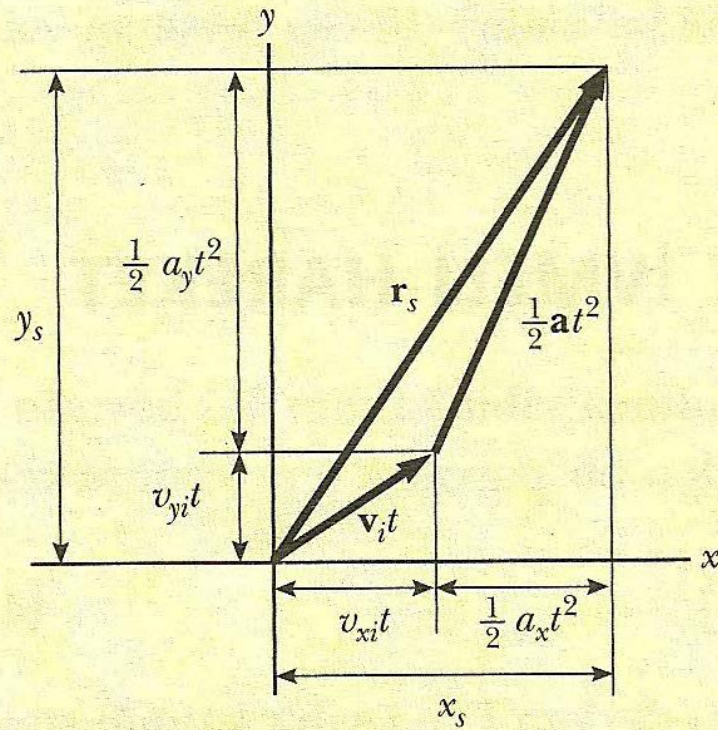
TABLO 2.2 Sabit İvmeli Doğrusal Hareketin Kinematik Denklemleri

Denklem	Denklem Tarafından Verilen Bilgi
$v_{xs} = v_{xi} + a_x t$	Zamanın fonksiyonu olarak hız
$x_s - x_i = \frac{1}{2} (v_{xi} + v_{xs}) t$	Hızın ve zamanın fonksiyonu olarak yerdeğiştirme
$x_s - x_i = v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	Zamanın fonksiyonu olarak yerdeğiştirme
$v_{xs}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_s - x_i)$	Yerdeğiştirmenin fonksiyonu olarak hız

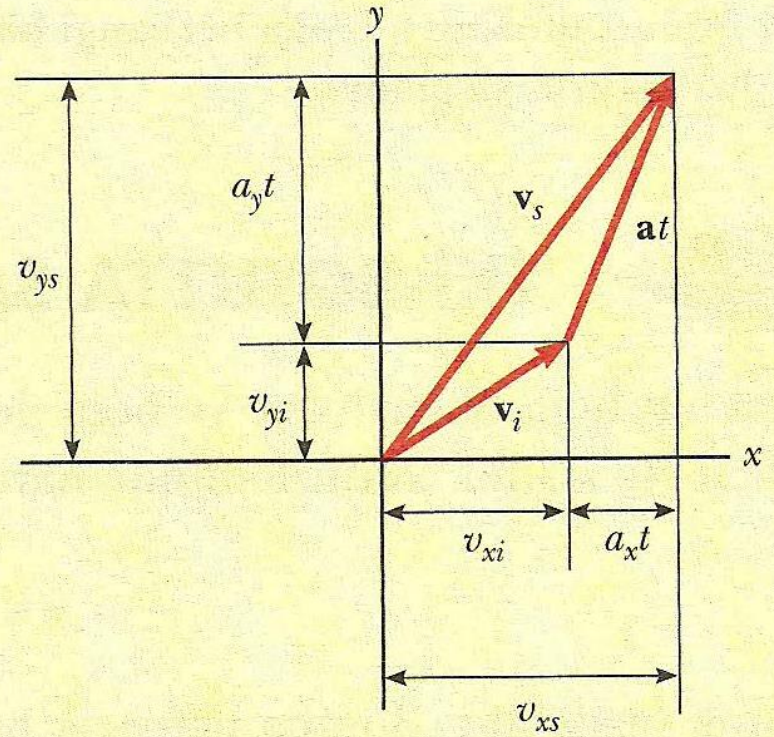
Not: Hareket x eksenini boyuncadır.

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2$$

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_i + \mathbf{a} t$$



(a)



(b)

Zamanın fonksiyonu olarak hız vektörü

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t$$

Zamanın fonksiyonu olarak yer vektörü

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \frac{1}{2} \mathbf{a}t^2$$

Bir boyutlu hareketin kinematik denklemlerinden farklı olarak, iki boyutlu hareketin denklemlerinin iki bileşeni vardır (X ve y)

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t$$

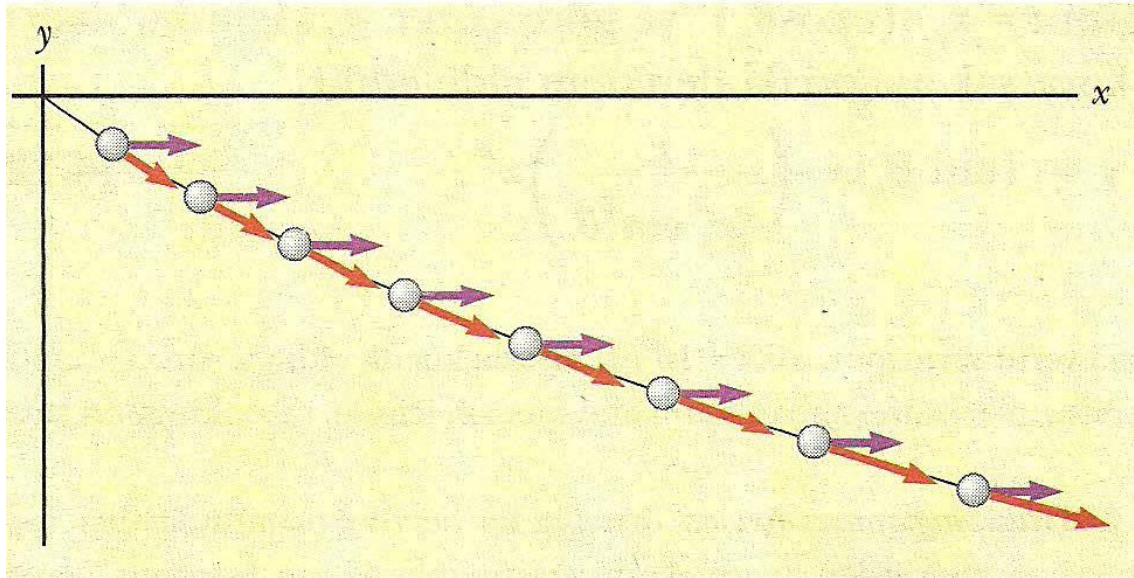
$$\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \frac{1}{2} \mathbf{a}t^2$$

$$\begin{cases} v_{xs} = v_{xi} + a_x t \\ v_{ys} = v_{yi} + a_y t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_s = x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y_s = y_i + v_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases}$$

Örnek: Düzlemde Hareket

Bir parçacık 20 m/s 'lik x bileşenli ve -15 m/s 'lik y bileşenli ilk hızla $t = 0$ 'da orijinden harekete geçmektedir. Parçacık sadece, $a_x = 4 \text{ m/s}^2$ ile verilen ivmenin x bileşeniyle xy düzleminde hareket etmektedir. (a) Zamanın fonksiyonu olarak herhangi bir andaki hızın bileşenlerini ve toplam hız vektörünü bulunuz.



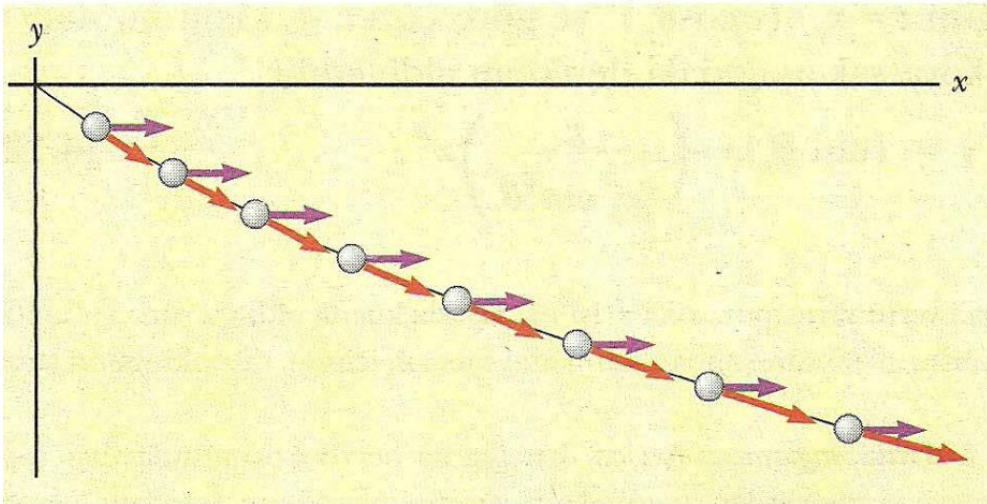
Şekil 4.5 Parçacığın hareket diyagramı

Hızın x bileşeni 20 m/s ile başlar ve her saniye 4 m/s artar.
y bileşeni -15 m/s lik ilk değerini korur.

$$v_{xs} = v_{xi} + a_x t = (20 + 4t) \text{ m/s}$$

$$v_{ys} = v_{yi} + a_y t = -15 \text{ m/s} + 0 = -15 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_s = v_{xs} \mathbf{i} + v_{ys} \mathbf{j} = [(20 + 4t)\mathbf{i} - 15\mathbf{j}] \text{ m/s}$$



Uzun zaman sonra x bileşeni çok fazla büyür ve onun yanında y bileşeni ihmal edilebilir boyuta gelir.

(b) $t = 5 \text{ s}$ 'de parçacığın hızının büyüklük, yön ve doğrultusunu hesaplayınız.

$$\mathbf{v}_s = \{ [20 + 4(5)]\mathbf{i} - 15\mathbf{j} \} \text{ m/s} = (40\mathbf{i} - 15\mathbf{j}) \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{ys}}{v_{xs}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-15 \text{ m/s}}{40 \text{ m/s}}\right) = -21^\circ$$

v 'nin büyüklüğü

$$v_s = |\mathbf{v}_s| = \sqrt{v_{xs}^2 + v_{ys}^2} = \sqrt{(40)^2 + (-15)^2} \text{ m/s} = 43 \text{ m/s}$$

(c) Herhangi bir t anındaki x ve y koordinatlarını ve bu anındaki yer değiştirme vektörünü bulunuz.

$t = 0$ da, $x_i = y_i = 0$ olduğundan

$$x_s = v_{xi}t + \frac{1}{2} a_x t^2 = (20t + 2t^2) \text{ m}$$

$$y_s = v_{yi}t = (-15t) \text{ m}$$

$$\mathbf{r}_s = x_s \mathbf{i} + y_s \mathbf{j} = [(20t + 2t^2)\mathbf{i} - 15t\mathbf{j}] \text{ m}$$

$t = 5 \text{ s}$ de, $x = 150 \text{ m}$ ve $y = -75 \text{ m}$

$$r_s = |\mathbf{r}_s| = \sqrt{(150)^2 + (-75)^2} \text{ m} = 170 \text{ m}$$

Eğik Atış Hareketi

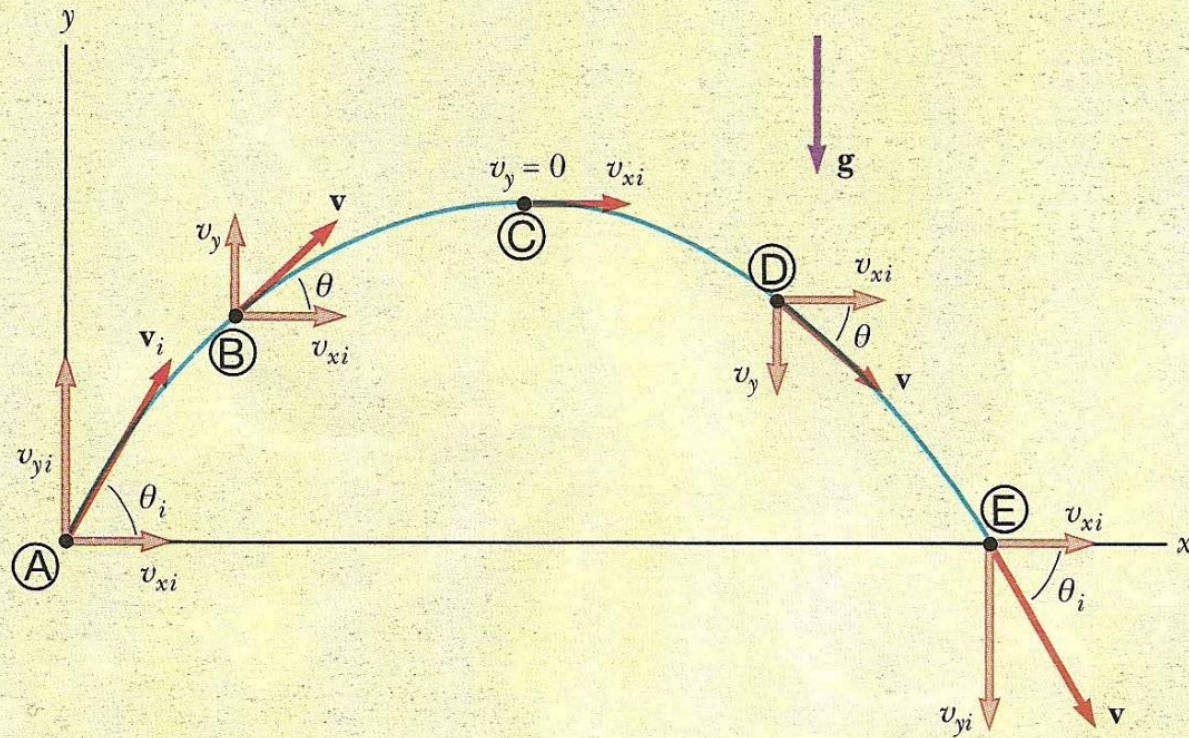
Havaya fırlatılan herhangi bir cismin yaptığı hareket eğik atış hareketidir.

Hareketin analizini yaparken, iki kabul yapılır:

a) g yerçekimi ivmesi hareket süresince sabit aşağı yönlüdür.

b) Hava direncinin etkisi ihmal edilmektedir.

Bu varsayımlarda, eğik olarak atılan bir cismin yolu olan eğri daima bir paraboldür.



Konumun yatay bileşeni

$$x_s = v_{xi} t = (v_i \cos \theta_i) t$$

Konumun düşey bileşeni

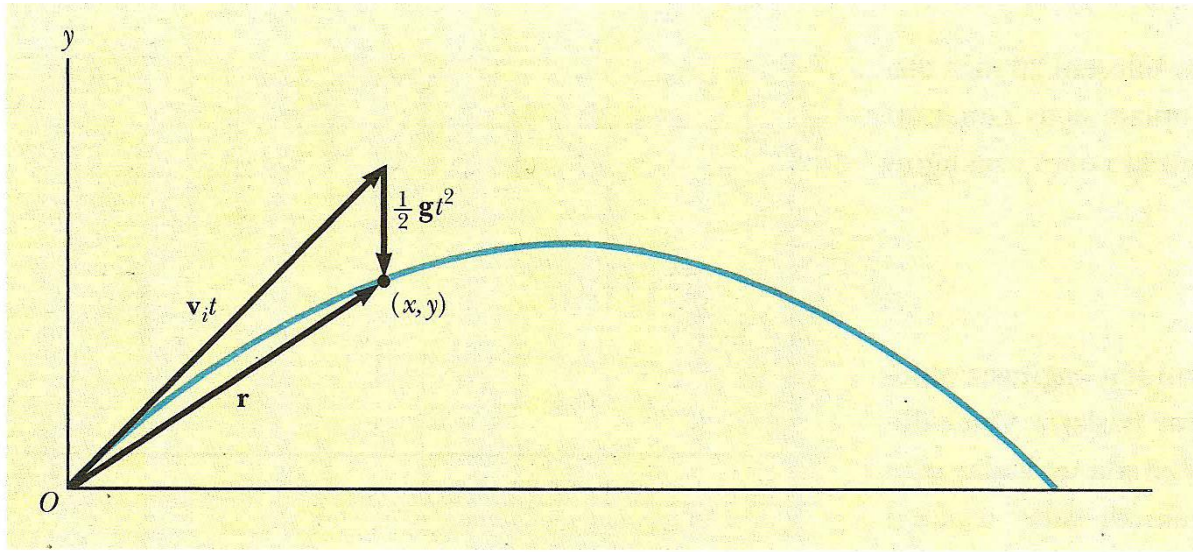
$$y_s = v_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = (v_i \sin \theta_i) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Zamanın fonksiyonu olarak yer vektörü

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2$$

Eğik atış yapan bir cismin konum vektörünün ifadesi, $\mathbf{r}_i = 0$ ve $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ alınmak suretiyle 4.9 Eşitliğinden doğrudan doğruya şu şekilde yazılabilir:

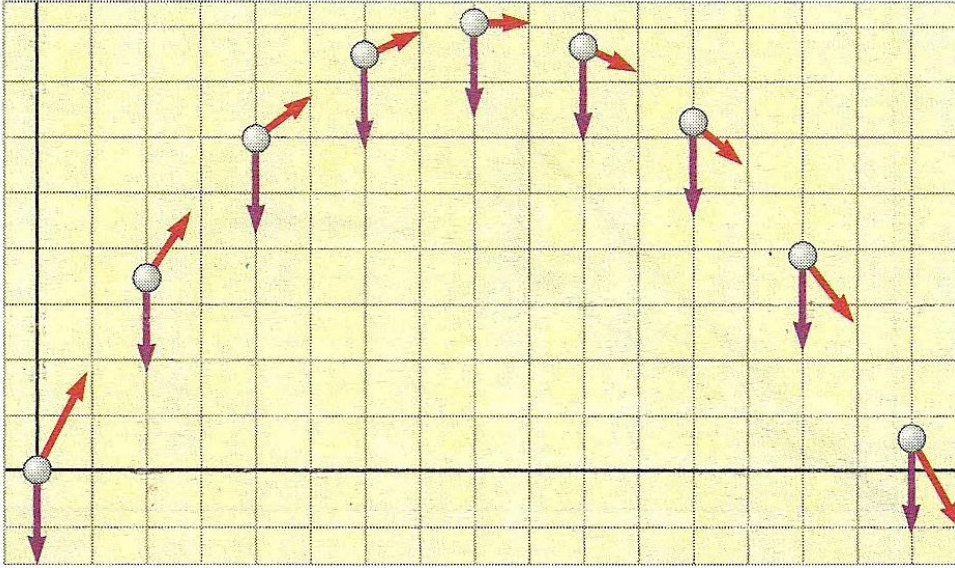
$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_i t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$$



Şekil 4.7 Orijinden $\mathbf{v}_i$ ilk hızıyla eğik atılan cismin $\mathbf{r}$ yerdeğiştirme vektörü. $\mathbf{v}_i t$ vektörü, yerçekimi olmasaydı eğik atılan cismin yerdeğiştirmesi olacaktı. $\frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$ vektörü, t zamanında yerçekiminden ileri gelen düşey yerdeğiştirme vektörüdür.

Örnek: Eğik Atış Hareketi

İlk hızının düşey bileşeni 40 m/s , yatay bileşeni 20 m/s olacak şekilde bir top fırlatılmaktadır. Toplam uçuş zamanını ve top yere düştüğünde fırlatış noktasından olan uzaklığını tahmin ediniz.

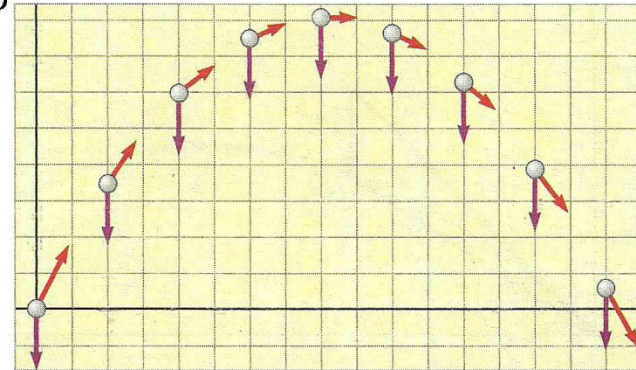


İvme vektörlerinin hepsi 10 m/s^2 ve aşağı yönlüdür. Hız vektörleri yer değiştirir. Yatay bileşenleri aynı ve 20 m/s 'dir. Düşme hareketi serbest düşme olduğundan hız vektörleri yukarı yönde 40 m/s 'den $30, 20, 10$ ve 0 m/s 'yeye düşer.

Şekil 4.8 Bir eğik atışın hareket diyagramı

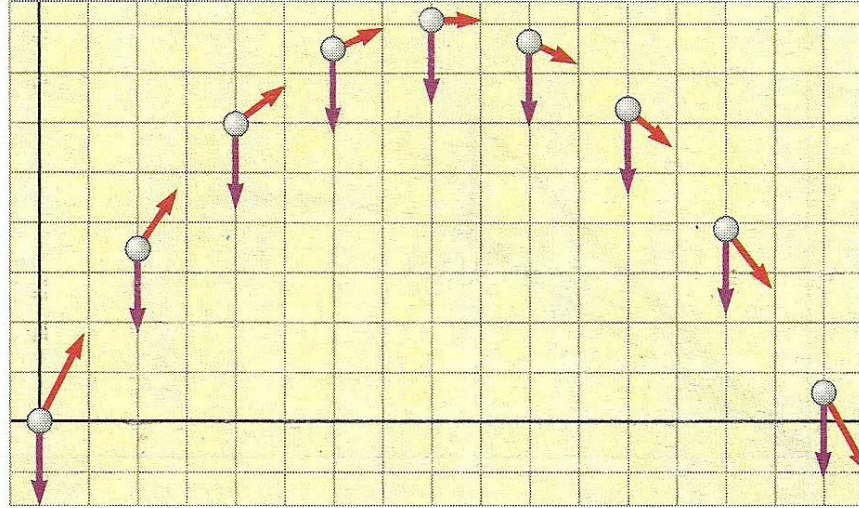
Çözüm İki hız bileşeninin birbirinden bağımsız olduğunu hatırlayarak problemin çözümüne başlarız. Önce düşey hareketi gözönüne alarak, topun havada ne kadar süre kaldığını tahmin edebiliriz. Sonra, alınan yatay uzaklığı tahmin etmek için uçuş zamanını kullanabiliriz.

Şekil 4.8 'deki gibi bir hareket diyagramı, problemle ilgili bildiklerimizi organize etmemize yardım eder. İvme vektörlerinin hepsi, hemen hemen 10 m/s^2 büyüklükte, aşağı yöndedir. Hız vektörleri yön değiştirir. Onların yatay bileşenlerinin hepsi aynıdır: 20 m/s . Düşey hareketi bir serbest düşme olduğundan, hız vektörlerinin düşey bileşenleri yukarı yönde 40 m/s 'den kabaca 30 , 20 ve 10 m/s 'ye sonra 0 'a saniye ye değişir. Ardından, topun hızı aşağı yön



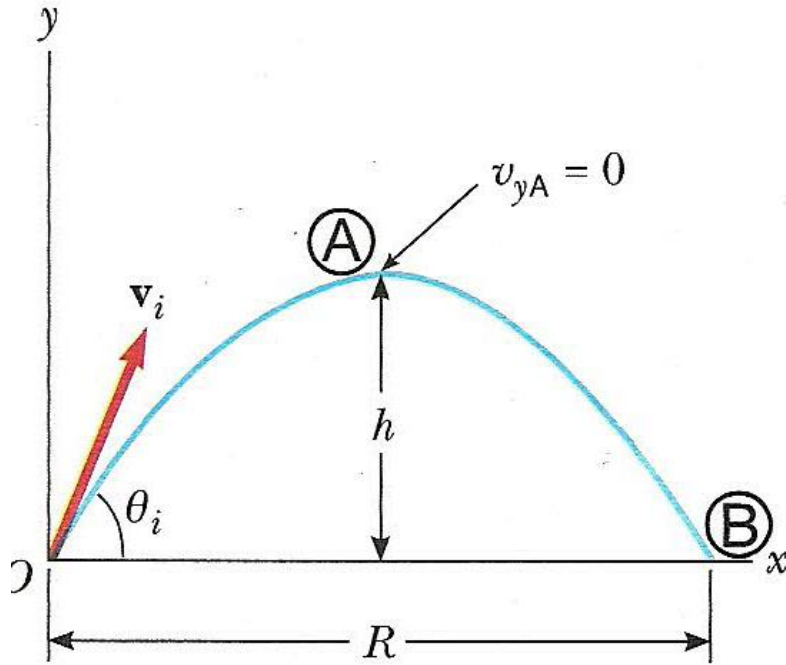
Şekil 4.8 Bir eğik atışın hareket diyagramı

Daha sonra topun hızı düşeyde 10,20,30 ve 40 m/s olur. Yaklaşık 8 s'lik bir toplam uçuş zamanı için, topun yükselmesi 4 s ve aşağıya geri gelmesi 4 s kadar zaman alır. Hızın yatay bileşeninin 20 m/s olması ve hızda 8 s gitmesi nedeniyle yol aldığı yol 160 m'dir.



Şekil 4.8 Bir eğik atışın hareket diyagramı

Eğik Atışta Cismin Menzili ve Maksimum Yüksekliği



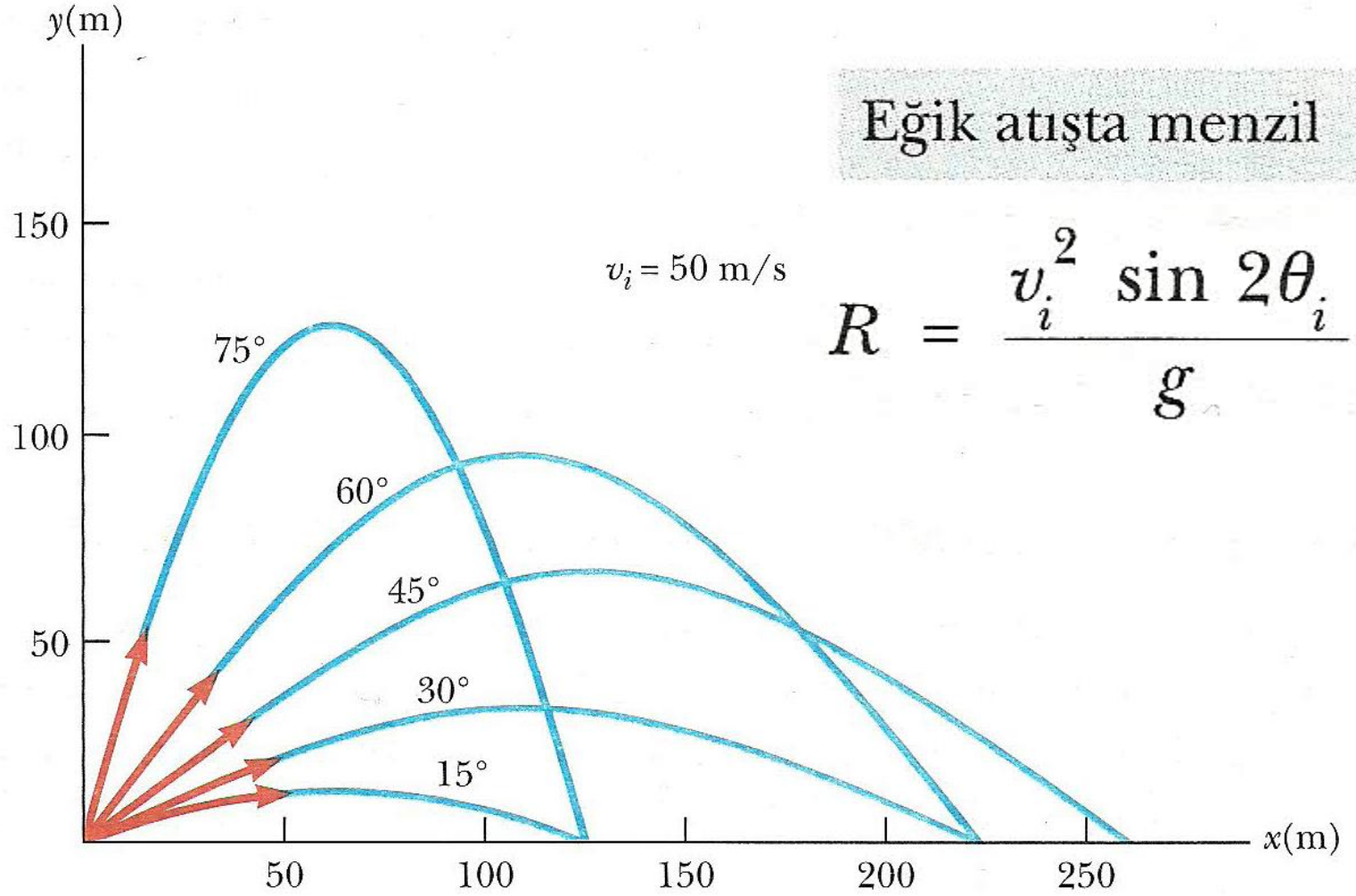
Şekil 4.9 Bir $\mathbf{v}_i$ ilk hızıyla $t_i = 0$ 'da orijinden, eğik atılan bir cisim. Cismin maksimum yüksekliği h ve menzili R dir. Cismin yolunun tepe noktası olan $\textcircled{A}$ 'da, parçacığın koordinatları $(R/2, h)$ dır.

Eğik atışta maksimum yükseklik

$$h = \frac{v_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g}$$

Eğik atışta menzil

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g}$$

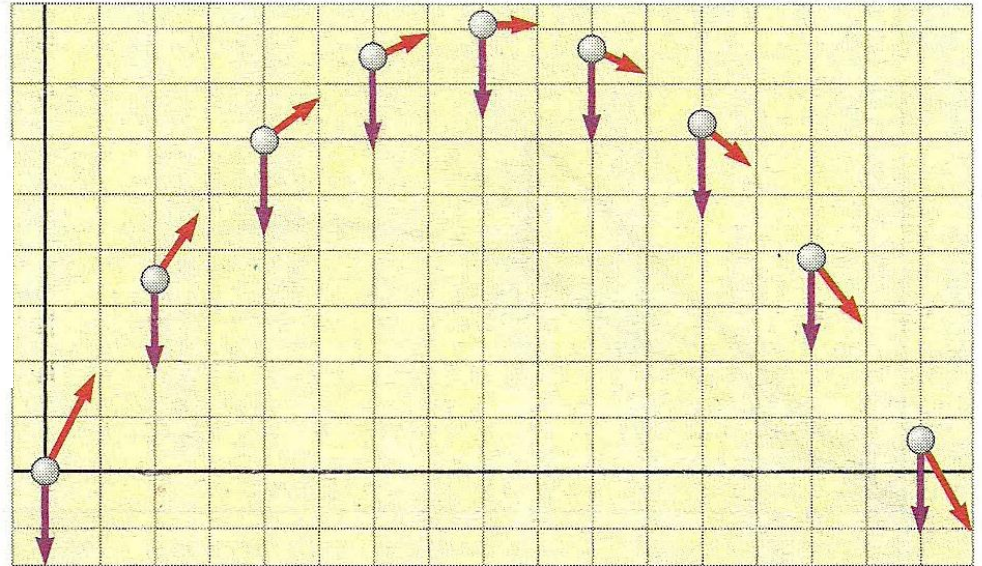


Şekil 4.10 Farklı açılarda, 50 m/s 'lik ilk hızla orijinden atılan cisim. θ_i 'nin bütünler açı değerleri sonuçlarının aynı x (cismin menzili) değerinde bulunduğuna dikkat ediniz.

ÖDEV: Eğik atış Hareketi

İlk hızının düşey bileşeni 40 m/s, yatay bileşeni 20 m/s olacak şekilde bir top fırlatılmaktadır. Toplam uçuş zamanını ve top yere düştüğünde fırlatış noktasından olan uzaklığını tahmin ediniz.

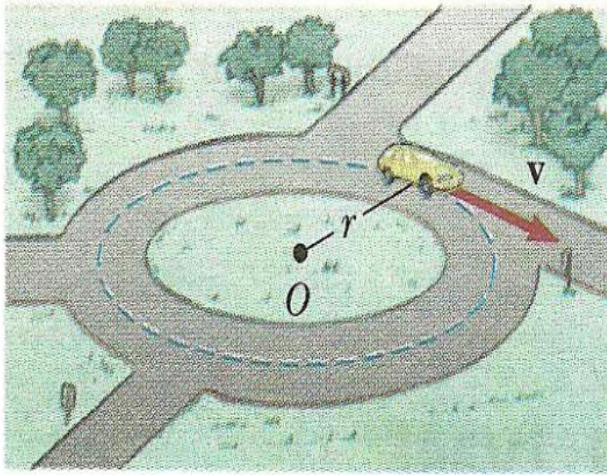
$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g}$$



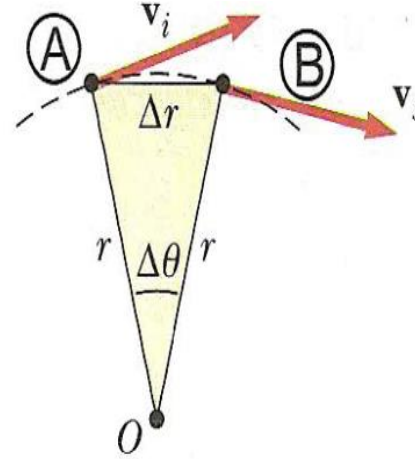
Şekil 4.8 Bir eğik atışın hareket diyagramı

Düzgün Dairesel Hareket

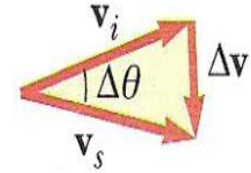
Bir cisim dairesel bir yol boyunca hareket ettiğinde, hız vektörü dairenin yarıçapına dik olur.



(a)



(b)



(c)

Şekil 4.16 (a) Sabit büyüklükde hızla dairesel bir yol boyunca hareket eden bir araba düzgün dairesel hareket yapar. (b) Parçacık A dan B ye hareket ederken, hız vektörünün doğrultusu v_i den v_s ye değişir. (c) Küçük Δr için dairenin merkezine doğru olan, hızdaki Δv değişiminin çizimle gösterilmesi.

merkezcil ivme

Parçacığın ivmesini hesaplamak için işe ortalama ivmeyi yazarak başlarız.

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_i}{t_s - t_i} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

**İvme vektörü daima yola dik ve dairenin merkezine yönelir.
Bu tür ivmeye Merkezci İvme denir.**

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

Merkezcil ivmenin radyal doğrultuda olduğunu gösteren ifade
: $\mathbf{a}_r$