

VEKTÖRLER

Vektörler ve Vektörel Toplam - I

- **Zaman, sıcaklık, kütle ve yoğunluk** gibi bazı fiziksel nicelikler birimi olan tek bir sayı ile tam olarak tanımlanabilir. Ancak fizikte birçok önemli nicelik ayrıca belirli bir yöne sahiptir ve bu nedenle sadece bir sayı ile tanımlanamaz. Buna vereceğimiz basit bir örnek **uçağın hareketi**dir. Bu hareketi tam olarak tanımlamak için sadece uçağın hızını bilmek yeterli olmaz. Gittiği yönü de bilmek durumundayız.

Vektörler ve Vektörel Toplam - II

- Uçak Chicago'dan New York'a gitmek için güneye değil doğuya doğru uçmalıdır. Uçağın hızı ile gittiği yönü bir arada belirleyen niceliğe «**hız vektörü**» denir.
- Bir fiziksel büyüklük tek bir sayı ile tanımlandığında ona **skaler nicelik** adını veririz. Bunun tersine, bir **vektörel nicelik** hem ne kadar veya ne derecede büyük olduğunu belirleyen bir büyüklük hem de uzayda belirli bir yön özelliğine sahiptir.

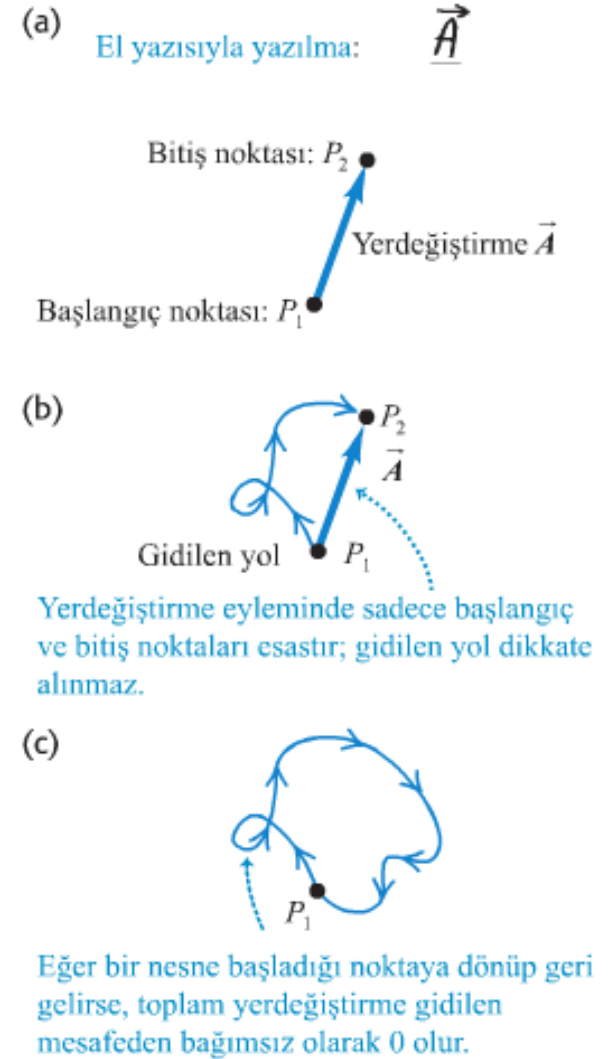
Vektörler ve Vektörel Toplam - III

- Skaler niceliklerle yapılan hesaplarda normal aritmetik kuralları geçerlidir. Örneğin $6\text{ kg} + 3\text{ kg} = 9\text{ kg}$ veya $4 \times 2\text{ s} = 8\text{ s}$ gibi
- Ancak vektörlerin toplanması farklı bir işlem biçimi gerektirir.

Vektörler ve Vektörel Toplam - IV

Şekil 1.9

- **Yerdeğiştirme** bir noktanın konumunun değişmesidir. Burada nokta deyince bir parçacık ya da küçük bir cismi anlıyoruz.
- Şekil 1.9a'da P_1 noktasından P_2 noktasına konum değişikliğini P_1 'den P_2 'ye doğru çizilmiş ve okun ucu P_2 'de olan bir çizgi ile gösteriyoruz.

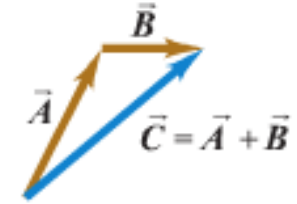


Vektörel Toplama

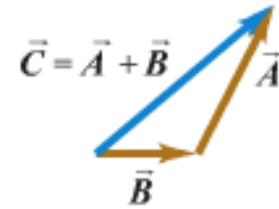
- Şekil 1.11a'da görüldüğü gibi, noktasal bir parçacığın $\vec{A}$ yerdeğiştirmesinden sonra ikinci bir $\vec{B}$ yerdeğiştirmesi yaptığını düşünelim. Şekilde gösterildiği gibi sonuçta bu parçacık sanki ilk noktadan başlayan tek bir $\vec{C}$ yerdeğiştirmesi yapmıştır.

1.11 İki vektörü toplamanın üç yolu.
(b) şıkında gösterildiği gibi, vektörel toplamada sıranın önemi yoktur. Vektörel toplama komütatif yol izler.

- (a) İki vektörü, ikincinin kuyruk ucunu birincinin baş tarafına yerleştirerek toplayabiliriz.



- (b) Toplama yapılırken vektörlerin sırasını değiştirmek de aynı sonucu verir.



- (c) Vektörlerden bir ikizkenar dörtgen oluşturarak da toplama yapabiliriz.



Vektörel Toplam

- $\vec{C}$ ile gösterilen yerdeğiştirmeye $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ yerdeğiştirmelerinin **vektörel toplamı** veya **bileşkesi** denir. Bu ilişkiyi sembolik olarak aşağıdaki gibi ifade ederiz.

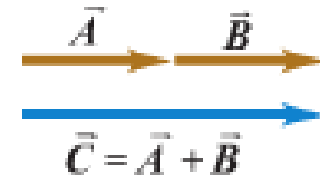
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

Vektörel Toplam

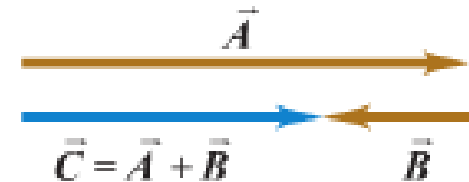
- Sadece $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin birbiriyle paralel oldukları durumda (Şekil 1.12a) $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ nin büyüklüğü $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin büyüklüklerinin toplamına eşit olur. Bunun tersine, vektörler anti-paralel durumda ise (Şekil 1.12b) $\vec{C}$ nin büyüklüğü $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin büyüklüklerinin farkına eşittir.

1.12 (a) Sadece $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri paralel oldukları durumda, her ikisinin toplam büyüklüğü tek tek büyüklüklerinin toplamına eşittir; $C = A + B$. (b) $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri anti paralel ise toplam büyüklük iki vektörün büyüklüklerinin farkı kadardır; $C = |A - B|$.

(a) İki paralel vektörün toplamı



(b) İki anti paralel vektörün toplamı

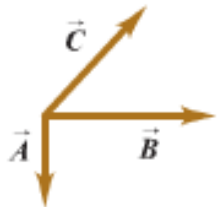


Vektörel Toplam

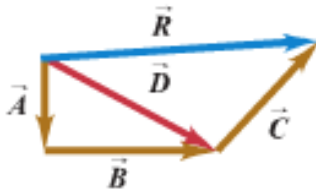
- İkiden fazla vektörü toplamamız gerektiğinde, ilk olarak herhangi ikisinin vektör toplamı bulunur, buna vektörel olarak üçüncünün değeri eklenir ve toplama bu şekilde devam ettirilir. Şekil 1.13a'da $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörleri görülmektedir. Şekil 1.13b'de bu vektörlerin toplanması anlatılıyor.

1.13 $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ vektörlerinin toplamını bulmak için değişik yollar.

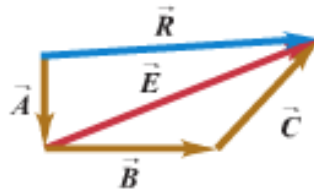
(a) Bu üç vektörün toplamını bulmaya çalışacağız.



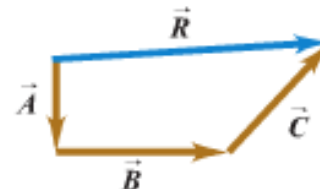
(b) $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ 'yi toplayıp $\vec{D}$ 'yi buluruz ve sonra da $\vec{C}$ vektörünü $\vec{D}$ 'ye ekleyip son toplam $\vec{R}$ 'yi (bileşke) buluruz.



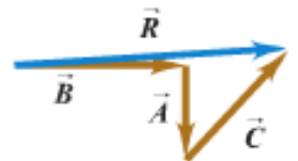
(c) $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ 'yi toplayıp $\vec{E}$ 'yi elde ederiz, sonra da $\vec{A}$ ile $\vec{E}$ 'yi toplayıp $\vec{R}$ 'yi buluruz.



(d) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerini komütatif olarak toplayıp $\vec{R}$ 'yi buluruz.



(e) Benzer bir yolla $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ 'yi herhangi bir sıra gözetmeden toplayıp gene $\vec{R}$ 'yi buluruz.



Örnek - Vektörel Toplama

- Dağda kayak yapan bir kişi düz bir kayak pistinde kuzeye doğru 1.00 km gittikten sonra doğuya dönüp bu yönde 2.00 km gitmiştir. İlk hareket noktasından ne kadar uzakta ve hangi yöndedir?

1.16 Kayak pistinin ölçeğe göre çizilmiş vektörel şeması



Çözüm:

- Şekil 1.16 kayakçının yaptığı yerdeğiştirmenin bir şemasıdır. Başlangıç noktasından olan yönü ϕ açısı ile gösteriyoruz. Şemadaki vektörler bir dik üçgen oluşturmaktadır. Başlangıç ve sonuç noktalarının uzunluğu bu üçgenin hipotenüsüdür.
- Pisagor teoremi kullanılarak,
$$\sqrt{(1.00 \text{ km})^2 + (2.00 \text{ km})^2} = 2.24 \text{ km}$$
$$\phi \text{ açısının değerini bulmak için ;}$$

$$\tan\phi = \frac{\text{karşı kenar}}{\text{komşu kenar}} = \frac{2.00 \text{ km}}{1.00 \text{ km}} = 63.4^\circ$$

1.16 Kayak pistinin ölçeğe göre çizilmiş vektörel şeması



Vektörlerin Bileşenleri – I

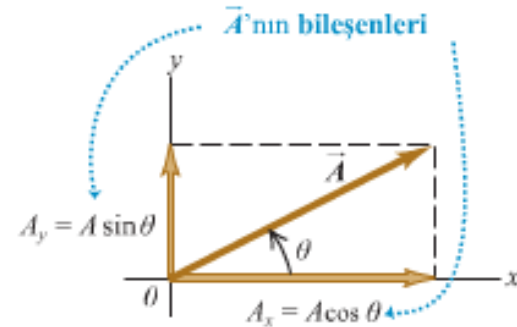
- Bir $\vec{A}$ vektörünün bileşenlerinin ne olduğunu tanımlamak için Kartezyen (dik açılı) koordinat sistemi ile çalışmaya başlarız (Şekil 1.17a). Bundan sonra $\vec{A}$ vektörünün alt ucunu O noktasına yani eksenlerin birleşme noktasına yerleştiririz. Böylece xy –düzleminde yer alan her vektörü, x eksenine paralel bir vektör ile y eksenine paralel bir vektörün toplamı olarak gösterebiliriz.

Şekil 1.17

(a)



(b)



Vektörlerin Bileşenleri – II

- Şekil 1.17a'da gösterildiği gibi iki vektör $\vec{A}_x$ ve $\vec{A}_y$ olarak tanımlanır. Bunlara $\vec{A}$ vektörünün **bileşen vektörleri** denir. Bunların vektörel toplamı $\vec{A}$ vektörüne eşittir. Sembolik olarak şöyle ifade edilir:

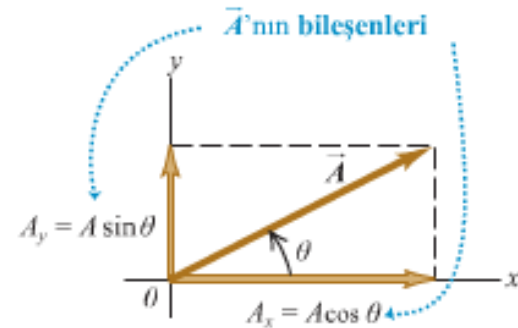
$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

Şekil 1.17

(a)



(b)



Vektörlerin Bileşenleri – III

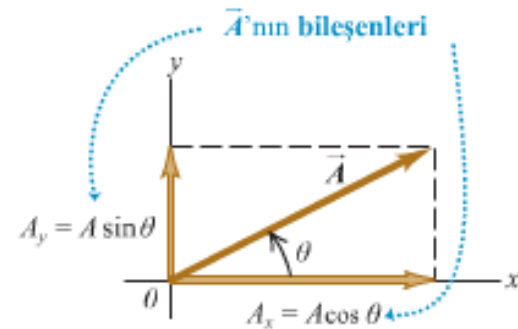
- $\vec{A}$ vektörünün büyüklüğü ve yönü bilinirse $\vec{A}$ nın bileşenlerini hesaplayabiliriz. Bir vektörün yönü, herhangi bir referans yönüyle yaptığı açı olarak tanımlanır. Şekil 1.17b’de bu referans yönü olarak pozitif x eksenini alınmıştır.

Şekil 1.17

(a)



(b)



Vektörlerin Bileşenleri – IV

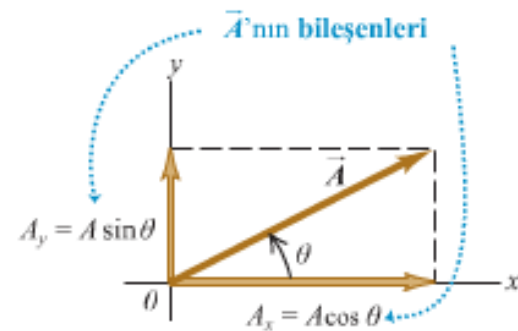
- $\vec{A}$ vektörü ile pozitif x eksenini arasındaki açı θ ile gösterilir. $\vec{A}$ vektörünün önce pozitif x ekseninde bulunduğunu ve daha sonra Şekil 1.17b’de θ açısı üzerindeki okla gösterildiği yönde döndürüldüğünü düşünelim. Eğer Şekil 1.17b’de gösterildiği gibi bu dönme pozitif x ekseninden pozitif y eksenine doğruysa θ açısı artı değerler taşıyacaktır. Eğer dönme pozitif x ekseninden negatif y eksenine doğruysa θ açısının değeri eksidir.

Şekil 1.17

(a)



(b)



Vektörlerin Bileşenleri – V

- θ açısı bu biçimde tanımlandığında trigonometrik fonksiyonların tanımından şu şekilde ifade edilir:

$$\frac{A_x}{A} = \cos\theta$$

$$\frac{A_y}{A} = \sin\theta$$

$$A_x = A \cos\theta$$

$$A_y = A \sin\theta$$

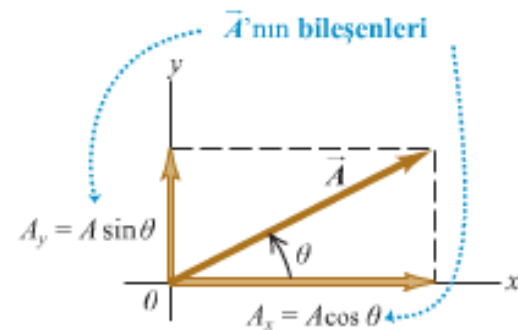
(θ açısı pozitif x ekseninden ölçülmekte ve pozitif y eksenine doğru dönmektedir.)

Şekil 1.17

(a)



(b)

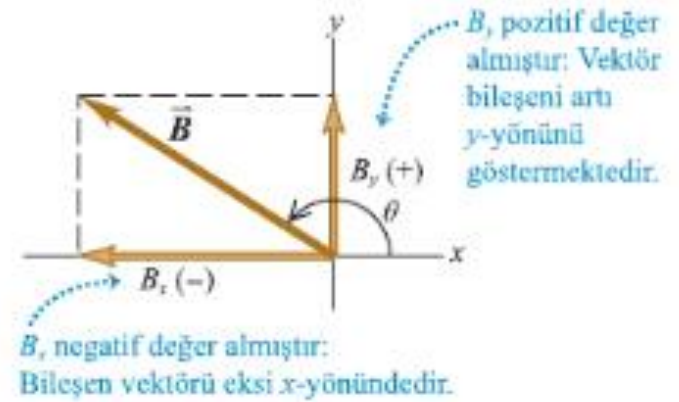


Vektörlerin Bileşenleri – VI

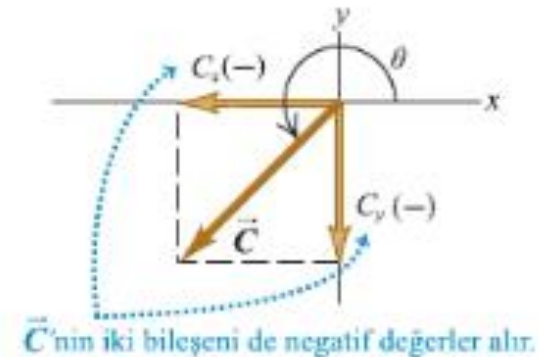
- Şekil 1.18'de gösterilen B_x bileşeni yönü pozitif x eksenine ters yönde olduğundan eksi değerler taşır. İkinci çeyrekte olan bir açının kosinüsü eksidir. B_y nin değeri ise artıdır (ikinci çeyrekte olan açılar için sinüs değeri artıdır). Şekil 1.18b'de gösterildiği gibi, üçüncü çeyrekte hem C_x hem C_y eksi değerler almaktadır, bu alanda $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ da eksi değerlidir.

1.18 Bir vektörün bileşenleri pozitif veya negatif sayılar olabilir.

(a)



(b)

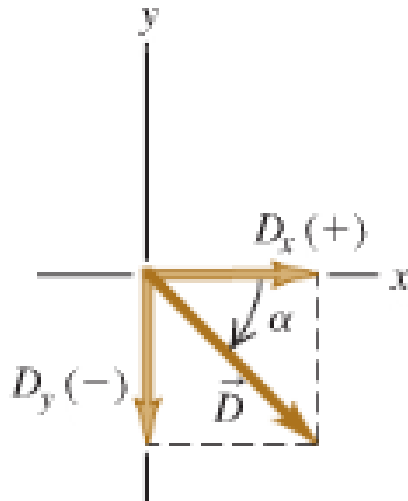


Örnek – Bileşenlerin Bulunması

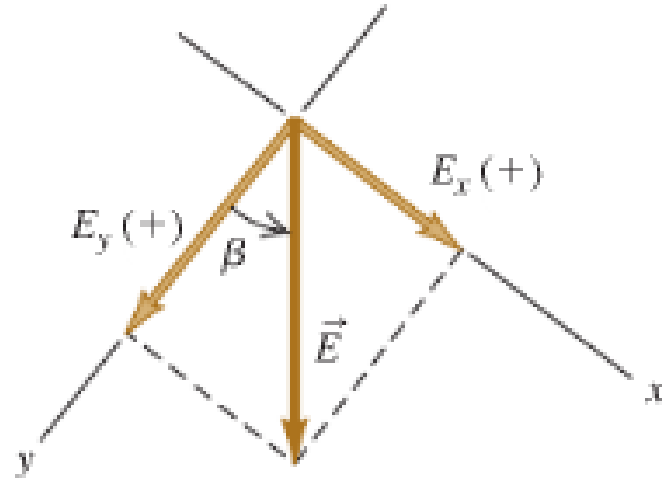
- (a) Şekil 1.19a'da gösterilen vektörün x ve y bileşenleri nelerdir? Vektörün büyüklüğü $D = 3.00 \text{ m}$ ve açısı $\theta = 45^\circ$ ile verilmiştir.
- (b) Şekil 1.19b'deki vektörün x ve y bileşenleri nelerdir? Vektörün büyüklüğü $E = 4.50 \text{ m}$ ve açısı $\beta = 37^\circ$ ile verilmiştir.

1.19 Vektörlerin x ve y -bileşenlerinin hesaplanması

(a)



(b)



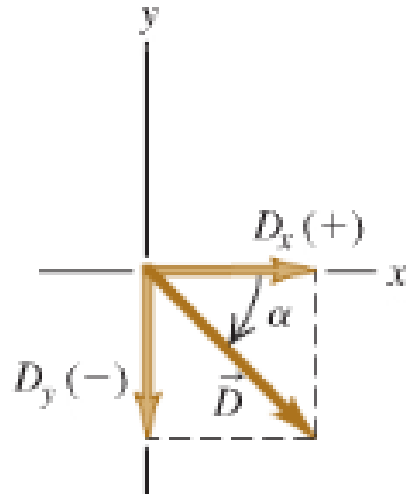
Çözüm (a şıkkı)

- Her iki soruda vektörün büyüklüğü ve yönü verilmiş ve bileşenlerini bulmamız istenmiştir.

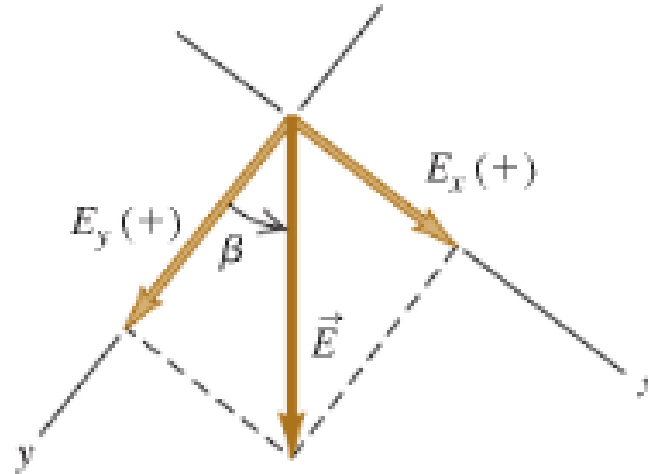
(a) $\vec{D}$ vektörü ile pozitif x eksenini arasındaki açı α ile gösterilmiştir. Ancak burada açı negatif y eksenine doğru ölçülmüştür. Bundan dolayı, $\alpha = -45^\circ$ olmalıdır.

1.19 Vektörlerin x ve y -bileşenlerinin hesaplanması

(a)



(b)



Çözüm – (a şıkkı)

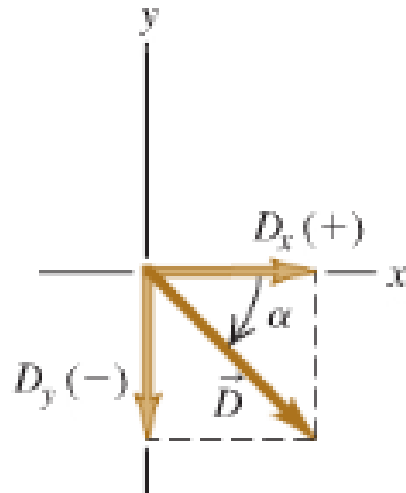
$$D_x = D \cos \theta = (3.00m)(\cos(-45^\circ)) = +2.1m$$

$$D_y = D \sin \theta = (3.00m)(\sin(-45^\circ)) = -2.1m$$

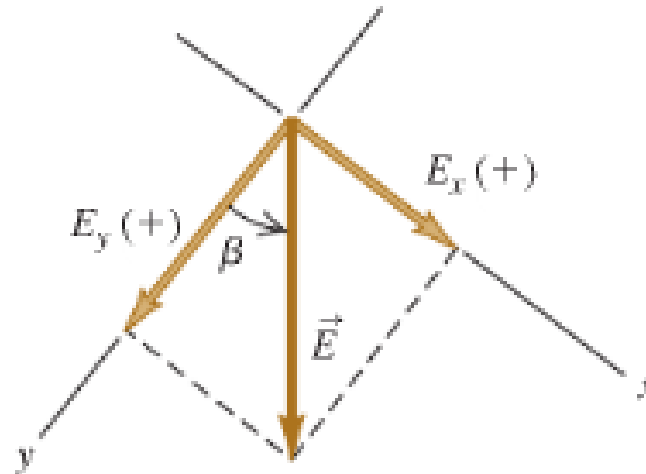
Şekilde görüldüğü gibi vektörün x bileşeni artı y bileşeni eksi değerler almaktadır.

1.19 Vektörlerin x ve y -bileşenlerinin hesaplanması

(a)



(b)

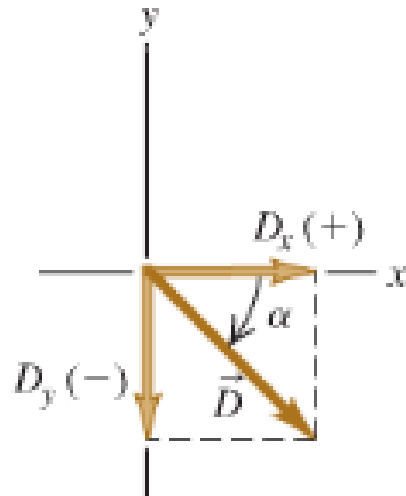


Çözüm – (b şıkkı)

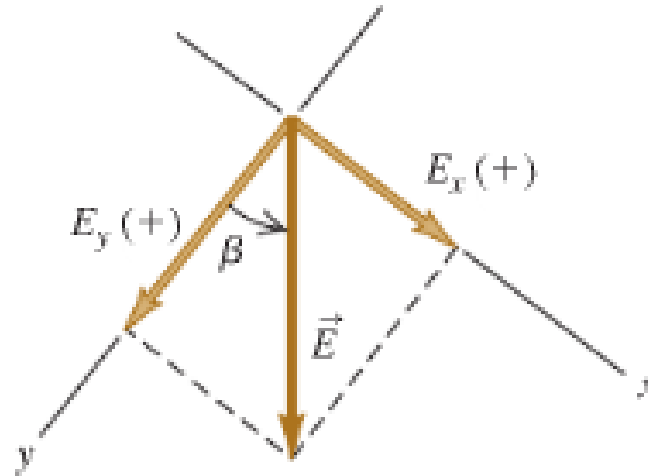
(b) Şekil 1.19b’de x eksenini yatay olarak verilmemiştir. y eksenini de dikey değildir. Bunun önemi yoktur; x ve y eksenleri herhangi bir şekilde konumlandırılmış olabilir, iki eksenin birbirlerine dik açılı olması yeterlidir. Burada β açısı $\vec{E}$ vektörünün pozitif y eksenini ile yaptığı açıdır, pozitif x eksenini ile yapmadığına dikkat edin !

1.19 Vektörlerin x ve y -bileşenlerinin hesaplanması

(a)



(b)



Çözüm – (b şıkkı)

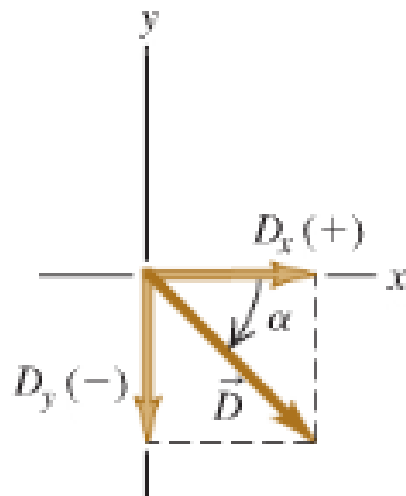
$$E_x = E \sin \beta = (4.50m)(\sin 37^\circ) = +2.71m$$

$$E_y = E \cos \beta = (4.50m)(\cos 37^\circ) = +3.59m$$

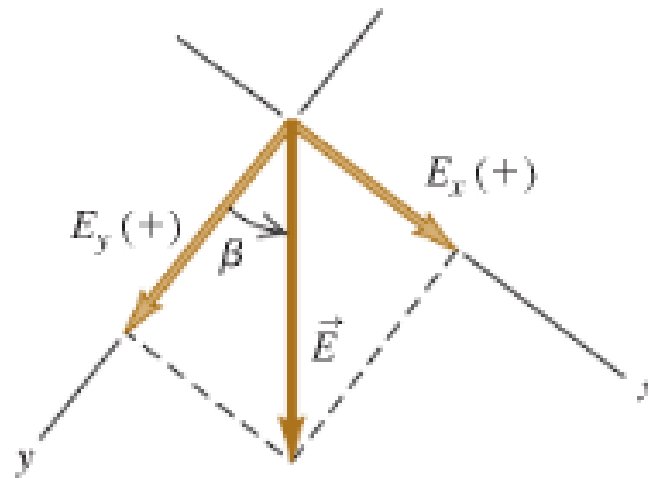
sonuçları bulunur.

1.19 Vektörlerin x ve y -bileşenlerinin hesaplanması

(a)



(b)



Bileşenleri Kullanarak Vektör Hesabı Yapmak

1. Bir vektörün büyüklüğü ve yönünün bileşenlerinden bulunması

Bir vektör, büyüklüğü ve yönü veya x ve y bileşenleri verildiğinde tam olarak tanımlanabilir. Aynı şekilde, bileşenleri biliyorsak o vektörün büyüklüğünü ve yönünü de bulabiliriz. Şekil 1.17b'ye Pisagor teoremi uygulandığında $\vec{A}$ vektörünün büyüklüğü şöyledir;

$$A = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}$$

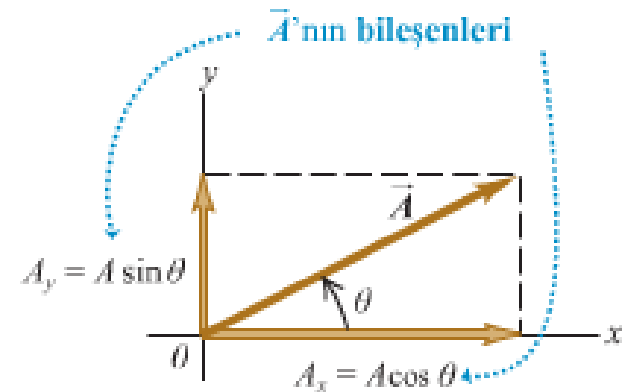
Her zaman pozitif kökü aldığımızı unutmayalım. θ açısı pozitif x ekseninden ölçülüyorsa ve değeri pozitif y eksenine doğru dönüyorsa (Şekil 1.17b'deki gibi);

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

$$\theta = \arctan \frac{A_y}{A_x}$$

Şekil 1.17

(b)



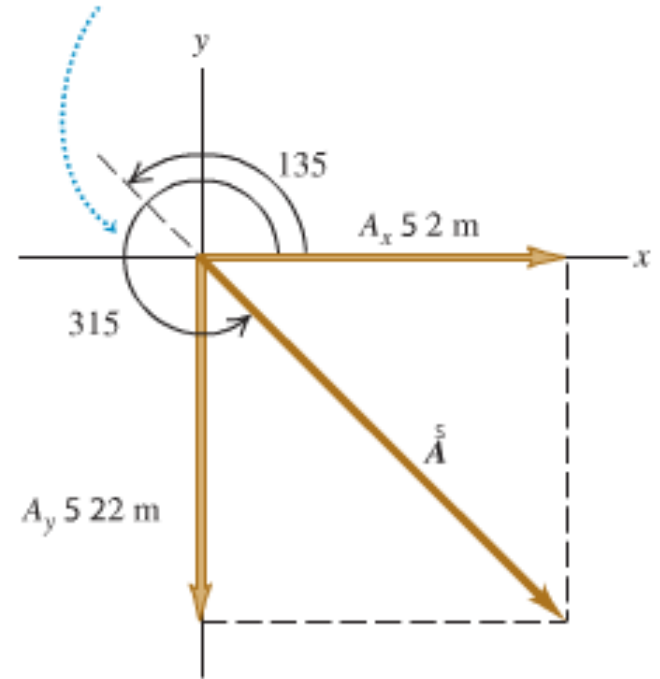
Örnek – 1.20

Şekil 1.20’de olduğu gibi $A_x = 2\text{m}$ ve $A_y = -2\text{m}$ olduğunu varsayalım. $\tan\theta = -1$ bulunur. Ancak hem 135° hem 315° (veya -45°) için tanjant değerleri -1 ’e eşittir. Hangi seçimin doğru olduğunu bulmak için bileşenlerine bakmalıyız. Burada A_x pozitif A_y negatif değerler aldığı için seçeceğimiz açı dördüncü çeyrekte olmalıdır. Bu nedenle $\theta = 315^\circ$ (veya -45°) doğru sonuçtur. Eğer $A_x = -2\text{m}$ ve $A_y = 2\text{m}$ olsaydı o zaman doğru açı 135° olacaktı.

1.20 Bir vektörün şeması çizerek onun x ve y -bileşenlerinin işaretlerinin ne olacağını kolaylıkla anlarız.

Eğer $\tan\theta = A_y / A_x = -1$ ise, θ nedir?

Tanjantları -1 ’e eşit iki açı vardır; 135° ve 315° . Şema üzerinde incelenme θ ’nın 315° olması gerektiğini gösteriyor.



Bileşenleri Kullanarak Vektör Hesabı Yapmak

2. Bir vektörün bir skalerle çarpılması

$\vec{A}$ vektörünü c skaleri ile çarptığımızda, $\vec{D} = c\vec{A}$ eşitliğinin her bir bileşeni, $\vec{A}$ nın her bileşeninin c değeri ile çarpımıdır.

$$D_x = cA_x \quad D_y = cA_y \quad (\vec{D} = c\vec{A} \text{ 'nın bileşenleri})$$

- Örneğin $2\vec{A}$ vektörünün her bileşeninin, $\vec{A}$ vektörünün bağlantılı bileşenlerinin de iki katı olduğunu söylemektedir. Demek ki, $2\vec{A}$, $\vec{A}$ ile aynı yönde ancak onun iki katı büyüklüğündedir.

Bileşenleri Kullanarak Vektör Hesabı Yapmak

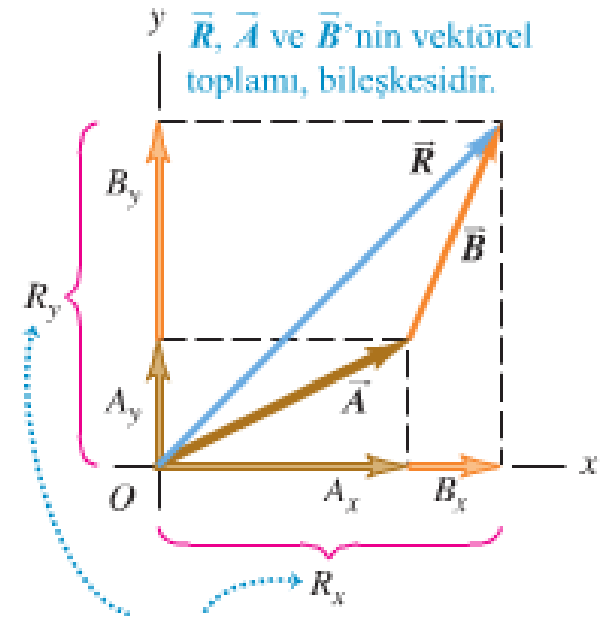
3. Bileşenleri kullanarak iki veya daha fazla vektörün toplamının bulunması

Şekil 1.21 $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ olarak iki vektörü ve bunların vektörel toplamı olan üçüncü bir $\vec{R}$ vektörünü her üç vektörün x ve y bileşenleriyle birlikte göstermektedir. Şemadan görülebileceği gibi vektör toplamının x bileşeni olan R_x toplanan ilk iki vektörün x bileşenlerinin toplamı olan $(A_x + B_x)$ ifadesi olarak verilmektedir.

$$R_x = A_x + B_x \quad R_y = A_y + B_y$$

($\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ nin bileşenleri)

1.21 $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ 'nin vektörel toplamını (bileşkesini) bileşenleri kullanarak bulmak.



$\vec{R}$ 'nin bileşenleri $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ 'nin bileşenlerinin toplamlarıdır:

$$R_y = A_y + B_y \quad R_x = A_x + B_x$$

Birim Vektör – I

- Bir birim vektör büyüklüğü 1 olan birimsiz bir vektördür; sadece uzayda bir yönü tanımlamak için kullanılırlar. Vektörlerin bileşenleri birim vektörler cinsinden rahatça ifade edilebilir. Birim vektörleri, büyüklükleri 1'e eşit olabilen veya olmayan diğer vektörlerden ayırt edebilmek için üzerlerinde «şapka» (^) notasyonunu kullanacağız.

Birim Vektör – II

- Herhangi bir xy koordinat sisteminde birim vektör $\hat{i}$ pozitif x yönünü, birim vektör $\hat{j}$ pozitif y yönüne işaret eden vektör olarak tanımlanabilir (Şekil 1.23a).

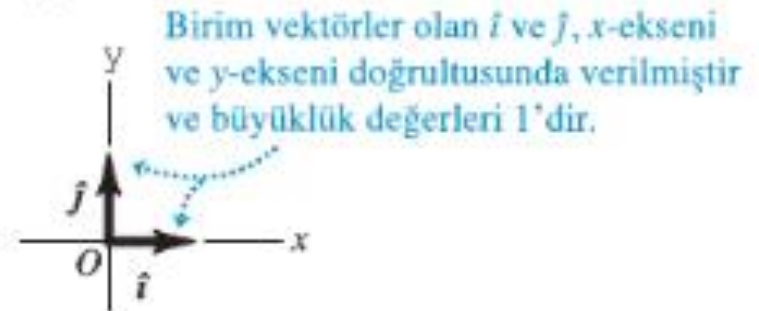
$$\vec{A}_x = A_x \hat{i} \quad \vec{A}_y = A_y \hat{j}$$

- A vektörü bileşenleri cinsinden;

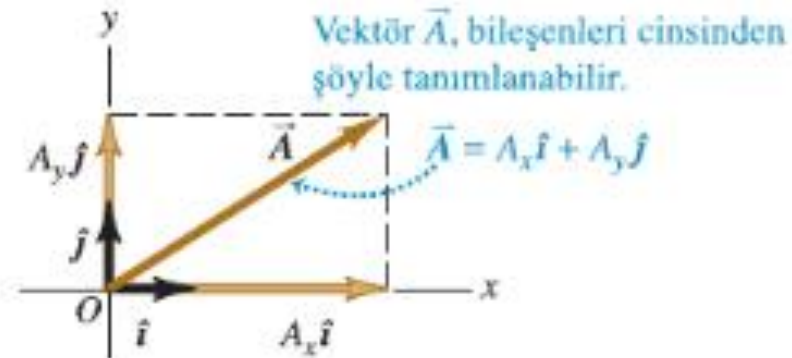
$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

1.23 (a) Birim vektörler olan $\hat{i}$ ve $\hat{j}$ verilmiştir. (b) Vektör $\vec{A}$ bileşenleri cinsinden ifade edilmiştir.

(a)



(b)



Birim Vektör – III

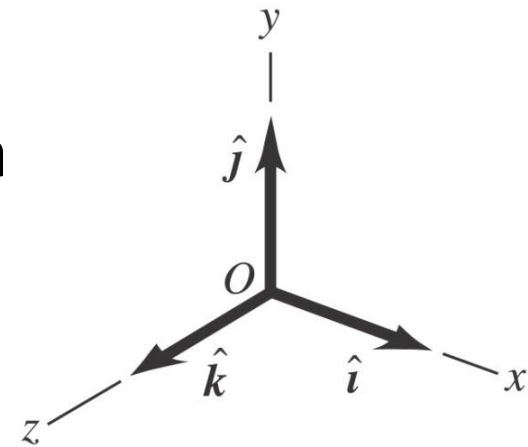
- Vektörler bir xy düzleminde bulunmadığı durumda üçüncü bir bileşen gerekecektir. Bunun için pozitif z eksenini doğrultusunda yer alan ve $\hat{\mathbf{k}}$ ile tanımlanan üçüncü bir vektör kullanırız (Şekil 1.24). Bu durumda

- $\vec{A} = A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}}$

- $\vec{B} = B_x \hat{\mathbf{i}} + B_y \hat{\mathbf{j}} + B_z \hat{\mathbf{k}}$

$$\begin{aligned}\vec{R} &= (A_x + B_x) \hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y) \hat{\mathbf{j}} + (A_z + B_z) \hat{\mathbf{k}} \\ &= R_x \hat{\mathbf{i}} + R_y \hat{\mathbf{j}} + R_z \hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Şekil 1.24



Vektörlerin Çarpımı

• Skaler Çarpım

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin **skaler çarpımı**, $\vec{A} \cdot \vec{B}$ olarak belirtilir. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ her ne kadar birer vektör olsalar da $\vec{A} \cdot \vec{B}$ skaler bir büyüklüktür. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin skaler çarpımı olan $\vec{A} \cdot \vec{B}$ yi tanımlamak için kuyrukları aynı noktadan başlayan iki vektör çizeriz (Şekil 1.25a). Yönleri arasındaki ϕ açısı 0° ile 180° arasında değişebilir. Şekil 1.25b, $\vec{B}$ vektörünün $\vec{A}$ vektörünün yönü üzerindeki izdüşümüdür. Bu izdüşümü $\vec{B}$ nin $\vec{A}$ yönündeki bileşenidir ve bu bileşenin büyüklüğü $B \cos \phi$ değerine eşittir.

Skaler çarpım denklem olarak;

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \phi = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \phi$$

ile ifade edilir.

1.25 İki vektörün skaler çarpımının hesaplanması, $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \phi$.

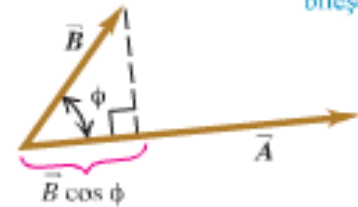
(a)



(b) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ eşittir $A(B \cos \phi)$.

($\vec{A}$ 'nin büyüklüğü)

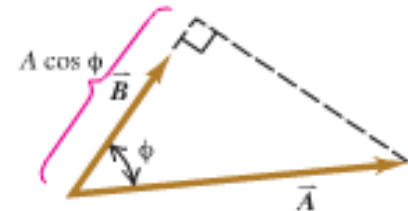
($\vec{A}$ yönündeki $\vec{B}$ 'nin bileşeni)



$\vec{A} \cdot \vec{B}$ eşittir $B(A \cos \phi)$.

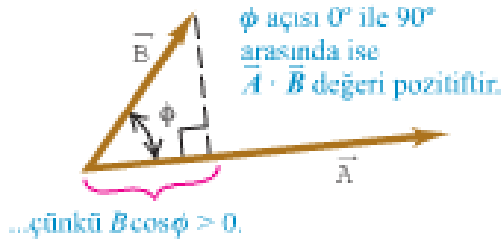
($\vec{B}$ 'nin büyüklüğü)

($\vec{B}$ yönündeki $\vec{A}$ 'nin bileşeni)

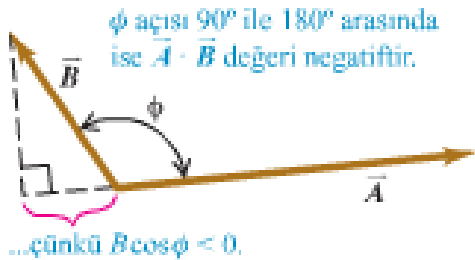


1.26 $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \phi$ skaler çarpımı $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ arasındaki açının durumuna göre pozitif, negatif veya sıfır olabilir.

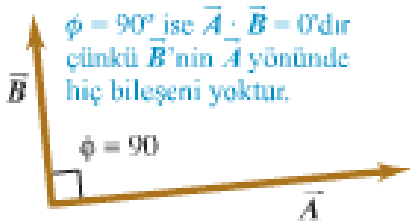
(a)



(b)



(c)



Skaler Çarpım (devam)

- Skaler çarpım skaler bir büyüklüktür. Vektörel bir büyüklük değildir ve pozitif, negatif veya sıfır olabilir. Φ açısı 0° ile 90° arasında olduğunda ($\cos \phi > 0$) skaler çarpım pozitiftir. (Şekil 1.26a) Φ açısı 90° ile 180° arasında olduğu durumda ise ($\cos \phi < 0$) ve $\vec{A}$ nın $\vec{B}$ yönündeki bileşeni negatiftir; bu nedenle $\vec{A} \cdot \vec{B}$ de negatif değer alır (Şekil 1.26b).
- $\Phi = 90^\circ$ için $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ dır (Şekil 1.26c). Birbirine dik vektörlerin çarpımı her zaman sıfırdır. Herhangi $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörü için skaler çarpımda vektörlerin yerlerinin değişmesi sonucu değiştirmez, skaler çarpım daima komütatiftir.

Bileşenler Kullanılarak Skaler Çarpım Hesabı – I

- $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin x, y, z bileşenleri biliniyorsa $\vec{A} \cdot \vec{B}$ skaler çarpımı doğrudan hesaplanabilir. Bu işlemin nasıl yapıldığına gelmeden önce birim vektörlerin skaler çarpımlarını hesaplayalım. $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ büyüklükleri 1'dir ve hepsi birbirlerine diktirler.

$$\begin{aligned}\hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = (1)(1)\cos 0^\circ = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = (1)(1)\cos 90^\circ = 0\end{aligned}$$

Bileşenler Kullanılarak Skaler Çarpım Hesabı – II

- Şimdi $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerini bileşenleri cinsinden ifade edelim, çarpımı birim vektörlerin çarpımı cinsinden açalım.

- $\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$

$$= A_x \hat{i} \cdot B_x \hat{i} + A_x \hat{i} \cdot B_y \hat{j} + A_x \hat{i} \cdot B_z \hat{k}$$

$$+ A_y \hat{j} \cdot B_x \hat{i} + A_y \hat{j} \cdot B_y \hat{j} + A_y \hat{j} \cdot B_z \hat{k}$$

$$+ A_z \hat{k} \cdot B_x \hat{i} + A_z \hat{k} \cdot B_y \hat{j} + A_z \hat{k} \cdot B_z \hat{k}$$

$$= A_x B_x \hat{i} \cdot \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \cdot \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \cdot \hat{k}$$

$$+ A_y B_x \hat{j} \cdot \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \cdot \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \cdot \hat{k}$$

$$+ A_z B_x \hat{k} \cdot \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \cdot \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \cdot \hat{k}$$

Bileşenler Kullanılarak Skaler Çarpım Hesabı – III

$$\begin{aligned}\hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = (1)(1)\cos 0^\circ = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = (1)(1)\cos 90^\circ = 0\end{aligned}$$

- İfadelerinden hareket ederek Bu dokuz ifadeden altısının sıfır olduğu kolayca görülebilir geriye kalan üçü ise basitçe aşağıdaki sonucu verir;

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (\text{Bileşenler cinsinden skaler çarpım})$$

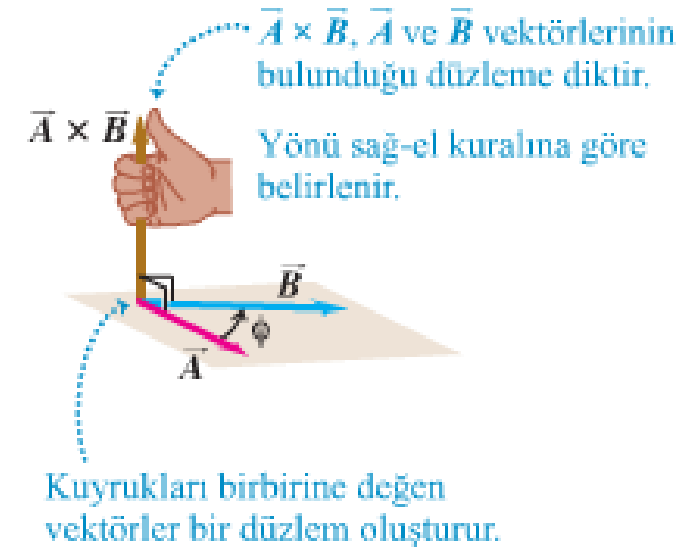
Buradan çıkan sonuç; iki vektörün skaler çarpımı; karşılıklı bileşenlerin çarpımlarının toplamıdır.

Vektörel Çarpım – I

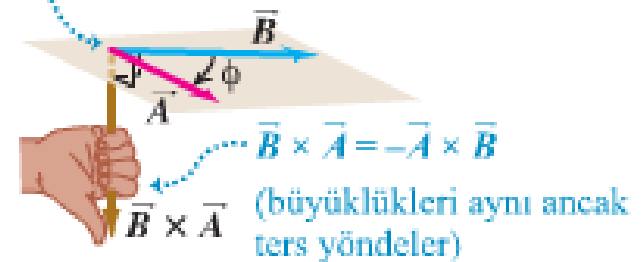
- $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin vektörel çarpımı $\vec{A} \times \vec{B}$ şeklinde gösterilir. Adından anlaşılacağı üzere vektörel çarpımın kendisi bir vektördür. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin $\vec{A} \times \vec{B}$ vektörel çarpımını tanımlamak için yine kuyrukları aynı noktadan başlayan iki vektör çizeceğiz (Şekil 1.29a). Bu iki vektör aynı düzlem içindedir.

1.29 (a) $\vec{A} \times \vec{B}$ vektörel çarpımının sağ-el kuralıyla bulunması. (b) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$; vektörel toplam anti komütatiftir.

(a)



(b)



Vektörel Çarpım – II

Vektörel çarpımı, vektörlerin düzlemine dik olarak gelen (yani $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ nin ikisine de dik) bir vektör büyüklüğü olarak düşünelim ve büyüklüğü $AB\sin\Phi$ olsun.

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ ise; $\vec{C} = \mathbf{ABsin\Phi}$ olmaktadır.

($\vec{A}$ ve $\vec{B}$ nin vektörel çarpımının büyüklüğü)

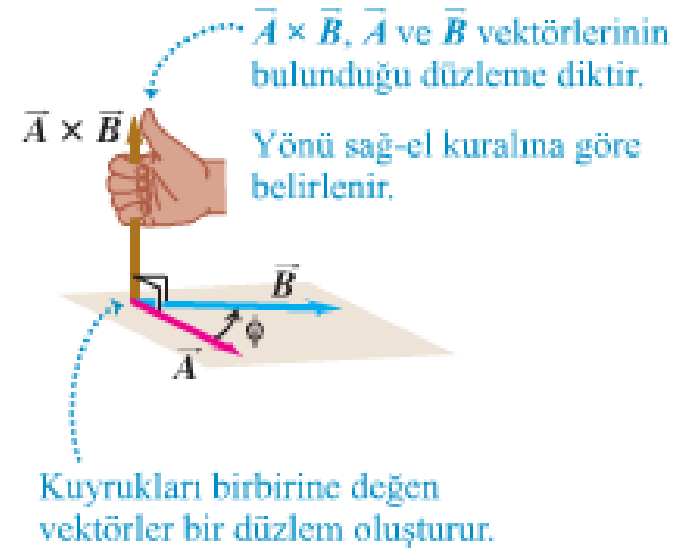
Burada Φ açısını $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ ye doğru ölçüyoruz; ancak iki muhtemel açıdan küçük olmasına dikkat ediyoruz, yani Φ açısı 0° ile 180° arasında değişecektir. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birbirlerine paralel olduklarında $\Phi = 0^\circ$ veya 180° ve $\vec{C} = 0$ olacaktır. Yani birbirlerine paralel veya antiparalel vektörlerin vektörel çarpımı daima sıfırdır.

Vektörel Çarpım – III

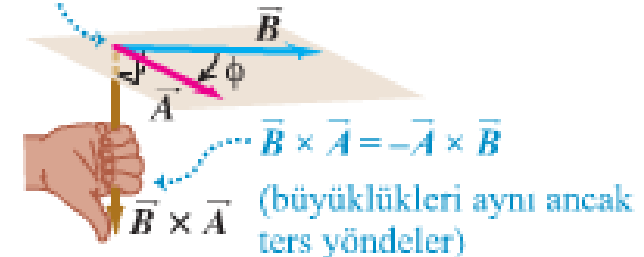
Bir düzleme dik olarak gelen iki zıt yön vardır, bu yönler düzlemin alt ve üst yüzeylerine yöneliktir. $\vec{A} \times \vec{B}$ çarpımında düzleme gelen dik yönü şöyle seçeriz; $\vec{A}$ yı düzleme dik bir eksen olacak şekilde $\vec{B}$ ile aynı hizaya gelene kadar çevirdiğimizi düşünelim. Bunu yaparken $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki iki açıdan küçüğünü alırız. Sağ elimizin parmak uçları dönme yönünü gösterecek şekilde, dik doğrultuyu sağ el parmaklarımızın içine alırız. Bu durumda kalkık başparmağımız $\vec{A} \times \vec{B}$ yönünü gösterecektir. Şekil 1.29 **sağ el kuralını** gösteriyor.

1.29 (a) $\vec{A} \times \vec{B}$ vektörel çarpımının sağ-el kuralıyla bulunması. (b) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$; vektörel toplam anti komütatiftir.

(a)



(b)



Vektörel Çarpım – IV

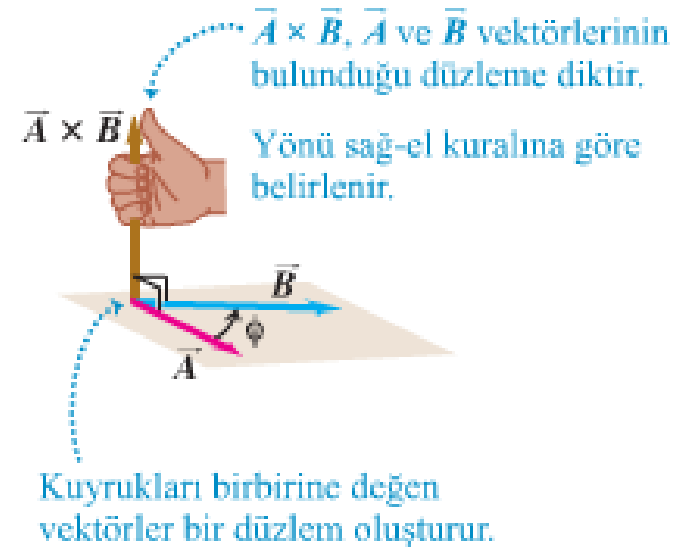
Benzer şekilde, $\vec{B} \times \vec{A}$ nın yönünü $\vec{B}$ yi Şekil 1.29b’de olduğu $\vec{A}$ nın üzerine çevirerek elde ederiz. Neticede $\vec{A} \times \vec{B}$ vektörüne zıt bir vektör ortaya çıkar. Herhangi iki $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörü için;

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

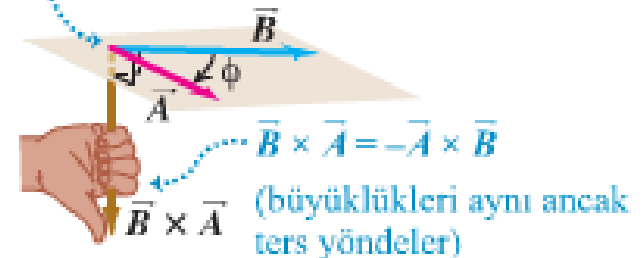
eşitliği geçerlidir.

1.29 (a) $\vec{A} \times \vec{B}$ vektörel çarpımının sağ-el kuralıyla bulunması. (b) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$; vektörel toplam anti komütatiftir.

(a)



(b)



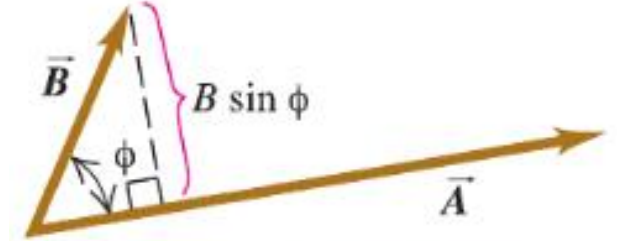
Vektörel Çarpım – V

Şekil 1.30a'da görüldüğü gibi $B \sin \Phi$, $\vec{B}$ vektörünün bileşenidir ve $\vec{A}$ vektörünün yönüne dik açıdır. Şekil 1.30b, $\vec{A} \times \vec{B}$ büyüklüğünün aynı zamanda $\vec{B}$ büyüklüğü ile $\vec{A}$ nın $\vec{A}$ ya dik gelen bileşeninin çarpımına eşit olduğunu gösterir.

1.30 İki vektörün vektörel çarpımı olan $AB \sin \phi$ büyüklüğünün hesaplanması, $\vec{A} \times \vec{B}$

(a)

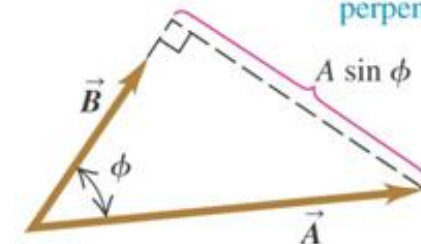
$(\vec{A} \times \vec{B})$ nin büyüklüğü eşittir $A(B \sin \phi)$.
($\vec{A}$ nın büyüklüğü) çarpı ($\vec{B}$ nin $\vec{A}$ ya dik gelen bileşeni)



($\vec{A} \times \vec{B}$ nin büyüklüğü) eşittir $B(A \sin \phi)$.
($\vec{B}$ nin büyüklüğü) çarpı ($\vec{A}$ nin $\vec{B}$ ya dik gelen bileşeni)

(b)

(Magnitude of $\vec{A} \times \vec{B}$) also equals $B(A \sin \phi)$.
(Magnitude of $\vec{B}$) times (Component of $\vec{A}$ perpendicular to $\vec{B}$)



Bileşenleri Kullanarak Vektörel Çarpım Hesabı

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin bileşenlerini biliyorsak skalar çarpımında yaptığımıza benzer bir yöntemle $\vec{A} \times \vec{B}$ vektörel çarpımının bileşenlerini hesaplayabiliriz. Önce $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ birim vektörlerinin vektörel çarpım tablosunu hazırlarız; bunların her üçü de birbirine diktir (Şekil 1.31a). Vektörlerin kendileri ile vektörel çarpımının değeri sıfırdır;

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

Sıfır rakamının koyu yazılmasının nedeni her çarpımın bir sıfır vektör olduğunu hatırlatmaktır; $\mathbf{0}$ vektörü bütün bileşenlerinin sıfır olan bir vektördür ve bu vektörün doğrultusu tanımlı değildir. Denklem (1.22), (1.23) ve sağ-el kuralını kullanarak

$$\begin{aligned}\hat{i} \times \hat{j} &= -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{k} &= -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{i} &= -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j}\end{aligned}\tag{1.24}$$

buluruz. Bu eşitlikleri Şekil 1.31a'ya bakarak doğrulayabilirsiniz.

Bir sonraki adımda $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ 'yi bileşenleri ve bunlara karşılık gelen birim vektörleri cinsinden ifade edip, bu ifadeleri vektörel çarpım yaparak açacağız.

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= A_x \hat{i} \times B_x \hat{i} + A_x \hat{i} \times B_y \hat{j} + A_x \hat{i} \times B_z \hat{k} \\ &\quad + A_y \hat{j} \times B_x \hat{i} + A_y \hat{j} \times B_y \hat{j} + A_y \hat{j} \times B_z \hat{k} \\ &\quad + A_z \hat{k} \times B_x \hat{i} + A_z \hat{k} \times B_y \hat{j} + A_z \hat{k} \times B_z \hat{k}\end{aligned}\tag{1.25}$$

Bileşenleri Kullanarak Vektörel Çarpım Hesabı

Denklem (1.25)'te yer alan her bir ifadeyi $A_x \hat{i} \times B_y \hat{j} = (A_x B_y) \hat{i} \times \hat{j}$ biçiminde yeniden yazabiliriz ve işlemi böylece devam ettirebiliriz. Denklem (1.24)'teki birim vektörler çarpım tablosunu kullanarak değerlendirilir ve çıkan birim vektörler gruplanarak;

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \quad (1.26)$$

Bundan dolayı $\vec{C}$ 'nin bileşenleri $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ bileşenleri aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} C_x &= A_y B_z - A_z B_y & C_y &= A_z B_x - A_x B_z & C_z &= A_x B_y - A_y B_x \\ &(\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \text{'nin bileşenleri}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Vektörel çarpım determinant biçiminde de ifade edilebilir.

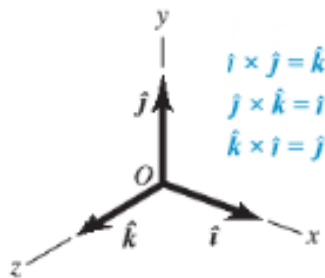
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Bileşenleri Kullanarak Vektörel Çarpım Hesabı

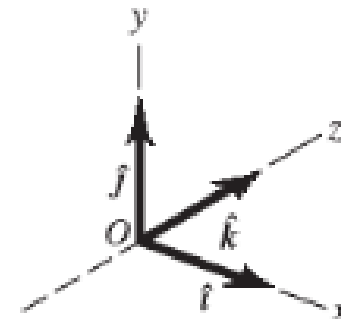
Şekil 1.31a'da görülen eksenler sisteminde z -eksenini ters çevirirsek Şekil 1.31b'de görülen durum ortaya çıkar. Bu durumda, sizin de anlayacağınız gibi, vektör çarpımının tanımına göre $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ yerine $\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{k}$ sonucu ortaya çıkar. Gerçekte, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ birim vektörlerinin vektör çarpımları, Denklem (1.24)'teki vektör birimlerinin işaretinin tersini taşımalıdır. Buradan hareketle, iki türlü koordinat sistemi olduğunu görmekteyiz; aralarındaki fark birim vektörlerinin vektörel çarpımının işaretleridir. Şekil 1.31a'da gösterilen $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ eksen sistemine, **sağ el sistemi** denir. Genel uygulama sağ el kuralına uyan koordinat sistemini kullanmaktır, biz de bu kitapta içinde bu sistemi kullanacağız.

- 1.31** (a) Anlatımlarda daima sağ-el kuralına uyan koordinat sistemi kullanacağız.
(b) Sol-el kuralına uyan koordinat sistemi, yani ($\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{k}$) anlatımlarda hiçbir zaman yer almayacaktır.

(a) Sağ-el koordinat sistemi



(b) Sol-el koordinat sistemi; bunu kullanmayacağız.



BÖLÜM 1 ÖZET

Fiziksel nicelikler ve birimler: Mekaniğin temel fiziksel nicelikleri kütle, uzunluk ve zamandır. Bu niceliklerle ilgili temel SI birimleri sırası ile kilogram, metre ve saniyedir. Diğer fiziksel nicelikler bu temel birimlerin sonuçları veya eşitliklerinin ürünüdürler. Denklemler birimsel olarak tutarlı olmak zorundadır; sadece aynı birimlere sahip olan büyükler toplanabilir. (Bkz. Örnek 1.1 ve 1.2)

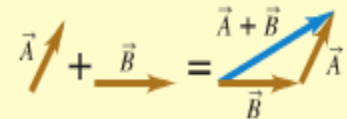
Anlamli basamaklar: Yapılan bir ölçümün hassasiyeti, anlamli basamakların sayısı veya açıkça tanımlanan belirsizlik oranı ile anlaşılır. Hesaplama sonuçları genelde giriş verisinden daha fazla anlamli basamak içermez. Giriş verisi olarak sadece kaba bir tahmin varsa, büyüklüğünün sadece derecesini tahmin edebiliriz. (Bkz. Örnek 1.3 ve 1.4)

Anlamli sayılar kırmızı ile gösterilmiştir

$$\mu = \frac{C}{2r} = \frac{0.424 \text{ m}}{2(0.06750 \text{ m})} = 3.14$$

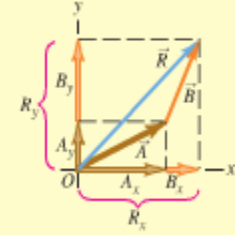
$$123.62 + 8.9 + 132.5$$

Skalarlar, vektörler ve vektör toplamı: Skalar büyükler sayılardan oluşur ve aritmetiğin alışla gelmiş kurallarıyla işlem yapılır. Vektörel büyüklüklerin hem yönleri hem de büyüklükleri vardır ve vektörel toplama kurallarına uygun olarak işlem yapılır. (Bkz. Örnek 1.5)



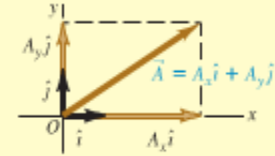
Vektör bileşenleri ve vektör toplama: Vektör toplama, vektör bileşenleri kullanılarak yapılır. $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ eşitliğinin x -bileşeni, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ 'nin x -bileşenlerinin toplanmasıyla bulunur; y ve z bileşenleri de benzer şekilde hesaplanır.
(Bkz. Örnek 1.6 – 1.8)

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x \\ R_y &= A_y + B_y \\ R_z &= A_z + B_z \end{aligned} \quad (1.10)$$



Birim vektörler: Birim vektörler uzaydaki yönü tanımlar. Bir birim vektörün büyüklüğü 1'dir ve birimi yoktur. $\hat{i}$, $\hat{j}$ ve $\hat{k}$ birim vektörleri bir dikdörtgensel koordinat sisteminin x , y ve z -eksenleri denk düşer ve özellikle çok kullanışlıdır.
(Bkz. Örnek 1.9)

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (1.16)$$



Skalar çarpım: $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin skalar çarpımı olan $C = \vec{A} \cdot \vec{B}$ skalar bir büyüklüktür. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin büyüklüğü ve aralarındaki ϕ açısı kullanılarak veya $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ 'nin bileşenleri ile ifade edilebilir. Skalar çarpım komütatif (işlemden sıraya bağlı olmayan) özellik göstermektedir; yani, $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$. Birbirine dik iki vektörün skalar çarpımı sıfırdır.
(Bkz. Örnek 1.10 ve 1.11)

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= AB \cos \phi = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \phi \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned}$$

Skalar çarpımı $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \phi$

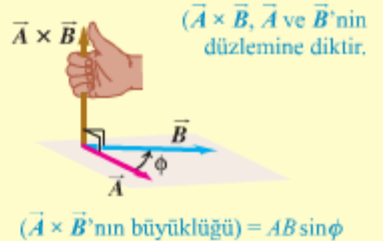


Vektörel çarpım: $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin vektör çarpımı olan $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, başka bir $\vec{C}$ vektörüdür. $\vec{A} \times \vec{B}$ 'nin büyüklüğü $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ 'nin büyüklüklerine ve bu iki vektörün aralarındaki ϕ açısına bağlıdır. $\vec{A} \times \vec{B}$ 'nin yönü, sağ-el kuralında anlatıldığı gibi, çarpımı yapılan iki vektörün düzlemine diktir. $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ bileşenleri $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin bileşenleri cinsinden ifade edilebilir. Vektörel çarpım komütatif özellik göstermez; $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$. Birbirlerine paralel veya anti-paralel iki vektörün vektörel çarpımı sıfırdır.
(Bkz. Örnek 1.12)

$$\begin{aligned} C &= AB \sin \phi \\ C_x &= A_y B_z - A_z B_y \\ C_y &= A_z B_x - A_x B_z \\ C_z &= A_x B_y - A_y B_x \end{aligned}$$

$$(1.22) \quad \vec{A} \times \vec{B} \quad (\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \text{ ve } \vec{B}'\text{nin düzlemine diktir.})$$

$$(1.27)$$



$(\vec{A} \times \vec{B})$ 'nin büyüklüğü $= AB \sin \phi$

Referans

Young ve Freedman, “*Sears ve Zemansky’nin Üniversite Fiziği*”, Cilt 1 – 2, Pearson yayınevi, 12.Baskı