

- Katı Cismin Sabit Bir Eksen Etrafında Dönmesi, Eylemsizlik momenti
- Yuvarlanma Hareketi, Dönme Enerjisi, Açısal Momentum ve Tork

Katı Cismin Sabit Bir Eksen Etrafında Dönmesi, Eylemsizlik Momenti

- Tekerlek gibi bir cisim, kendi eksenini etrafında döndüğünde, herhangi bir anda cismin farklı kısımları farklı hız ve ivmelere sahip olur.
- Dolayısıyla artık biz bu cismi bir parçacık gibi düşünemeyiz.
- Büyük cisimleri, her biri kendi hız ve ivmesiyle hareket eden bir çok parçacıktan oluşmuş olarak kabul ederiz.
- Bir cismin dönmesiyle ilgilenirken cismi katı olarak aldığımızda analiz oldukça sadeleşir.

- Bir **katı cisim**, şekli bozulmayan veya bütün parçacık çiftleri arasındaki uzaklıkların sabit olduğu bir cisimdir.
- Gerçekte bütün cisimlerin şekli bozulur. Bozulma ihmal edilebiliyorsa o zaman katı cisim modeli kullanılır.
- Bu bölümde saf dönme hareketi yani katı cismin sabit bir eksen etrafında dönmesi incelenecek.

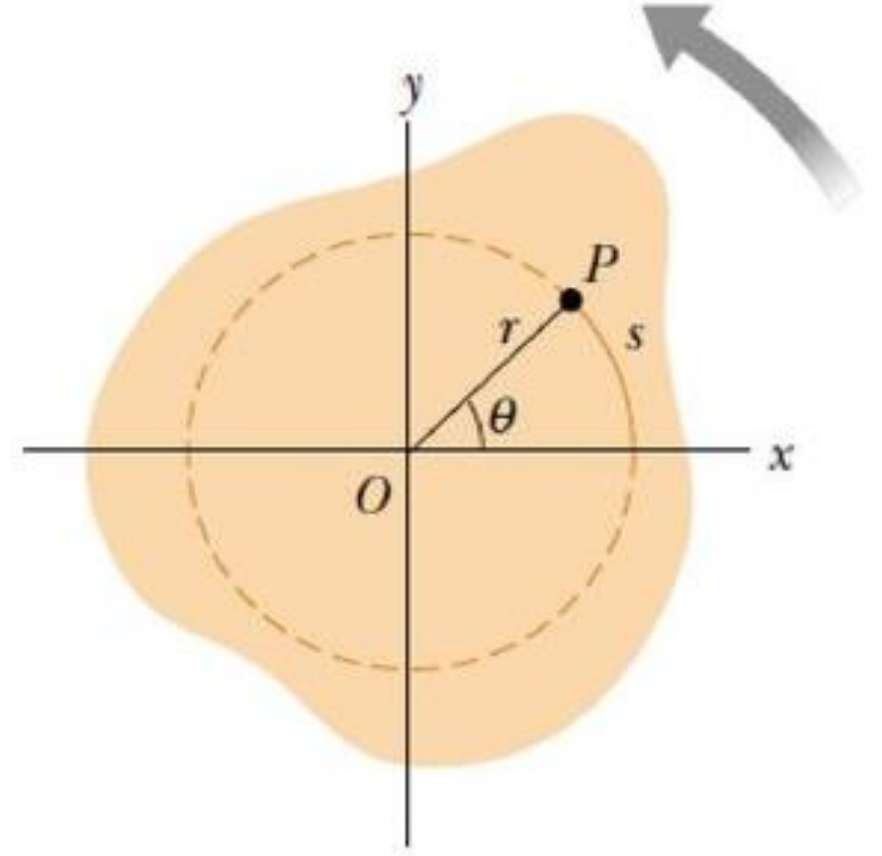
Açısal Yerdeğiştirme, Hız İvme

Cismin milyonlarca parçacığından birinin hareketini ele alalım.

P noktasının konumunu **kutupsal koordinatlar** (r, θ) ile göstermek uygundur.

r = orijinden P ye uzaklık

θ = pozitif x ekseninden itibaren saatin dönme yönünün tersinde ölçülen açı



- Bir parçacık pozitif x ekseninden ($\theta=0$) bir yay boyunca P noktasına s yay parçası kadar yer değiştirirse ; **$s=r\theta$ ve $\theta = \frac{s}{r}$**
- θ boyutsuz bir sayıdır ama yaygın olarak birimi radyan (rad) olarak bilinir.

$$\theta \text{ (rad)} = \frac{\pi}{180^\circ} \theta \text{ (derece)}$$

Δt Zaman aralığında yer değiştirme $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$

$$\bar{\omega} \equiv \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \text{Ortalama açısal hız}$$

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{Anlık açısal hız}$$

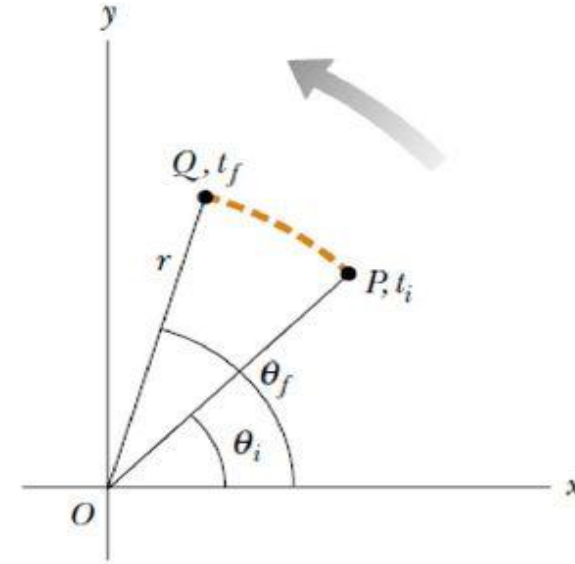
- θ artarken ω yı pozitif, θ azalırken de negatif alacağız.

Δt Zaman aralığında açısal hızdaki değişim $\omega_f - \omega_i$

$$\bar{\alpha} \equiv \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{Ortalama açısal ivme}$$

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{Anlık açısal ivme}$$

- Zamanla ω artarken α pozitif, ω azalırken α negatiftir.



Sabit bir eksen etrafındaki dönme için, katı cisim üzerindeki her parçacığın açısal hızı (ω) ve açısal ivmesi (α) **aynı** olur.

ω ve α nicelikleri, bütün katı cismin dönme hareketini belirler.

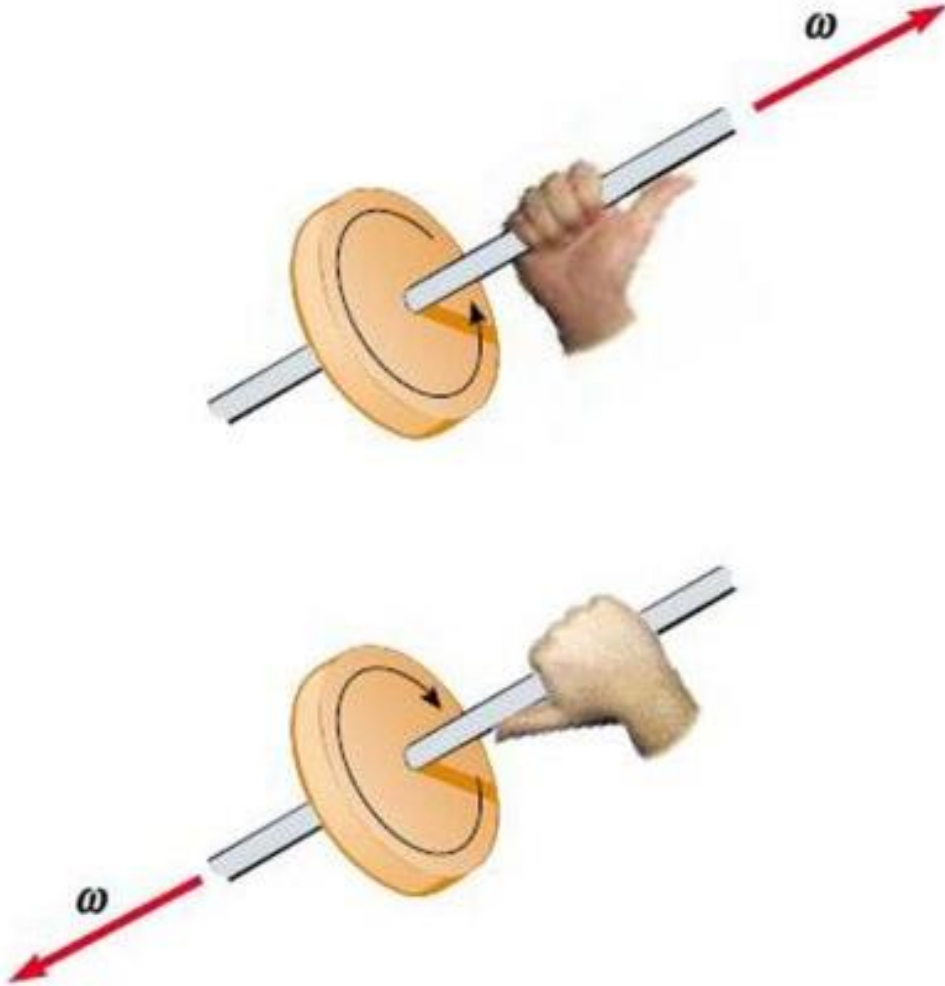
Açısal yerdeğiştirme (θ), açısal hız (ω) ve açısal ivme (α) sırasıyla daha önce incelediğimiz çizgisel yerdeğiştirme (x), çizgisel hız (v) ve çizgisel ivme (a) karşılık gelir.

ω ve α nın işaretlerinin nasıl olacağını söyledik ama vektörel nicelikleriyle ilgili uzayda bir yön belirtmedik.

Sabit bir eksen etrafında dönme için, uzayda dönme hareketini belirleyen tek yön, dönme eksenini boyunca olan yöndür.

Fakat düzlemden içeri doğru mu, dışarı doğru mu yöneldiği hakkında karar vermeliyiz.

- ω nın yönü dönme eksenini boyuncadır.
- Yönü ise dönme saat yönünün tersi yönündeyse düzlemden dışarı, saat yönündeyse düzlemden içeri olur.



Yandaki şekilde sağ el kuralı gösterilmektedir.

Sabit İvmeli Dönme Hareketi = dönme hareketinde incelenecek en basit ivmeli hareket.

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$$

Sabit bir eksen etrafında dönme hareketi

Doğrusal hareket

$$\begin{aligned}\omega_f &= \omega_i + \alpha t \\ \theta_f &= \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega_f^2 &= \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_f &= v_i + at \\ x_f &= x_i + v_i t + \frac{1}{2} at^2 \\ v_f^2 &= v_i^2 + 2a(x_f - x_i)\end{aligned}$$

Bu ifadeler sabit bir eksen etrafında hem katı cismin dönmesi hem de parçacık hareketi için geçerlidir.

Açısal ve Çizgisel Büyüklükler

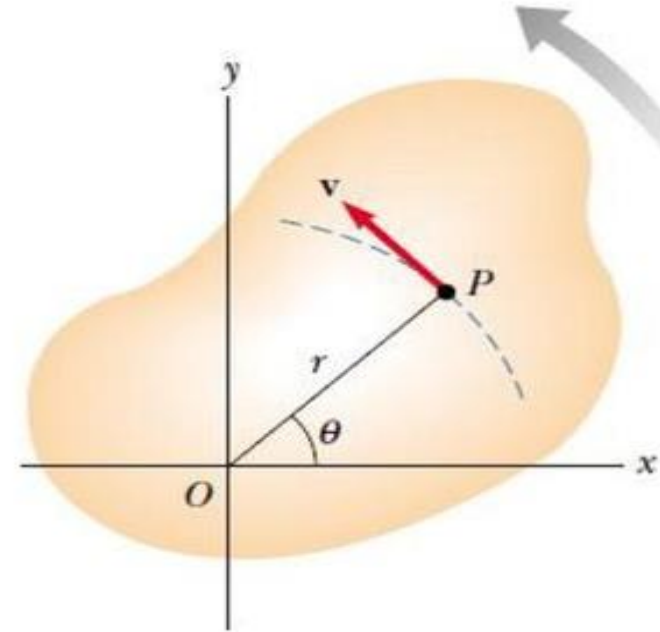
Çizgisel hız yani teğetsel hız v ile ω arasındaki bağıntı.

$$v = ds/dt$$

$$s = r\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$

$$d\theta/dt = \omega \text{ Olduğundan } v = r\omega$$

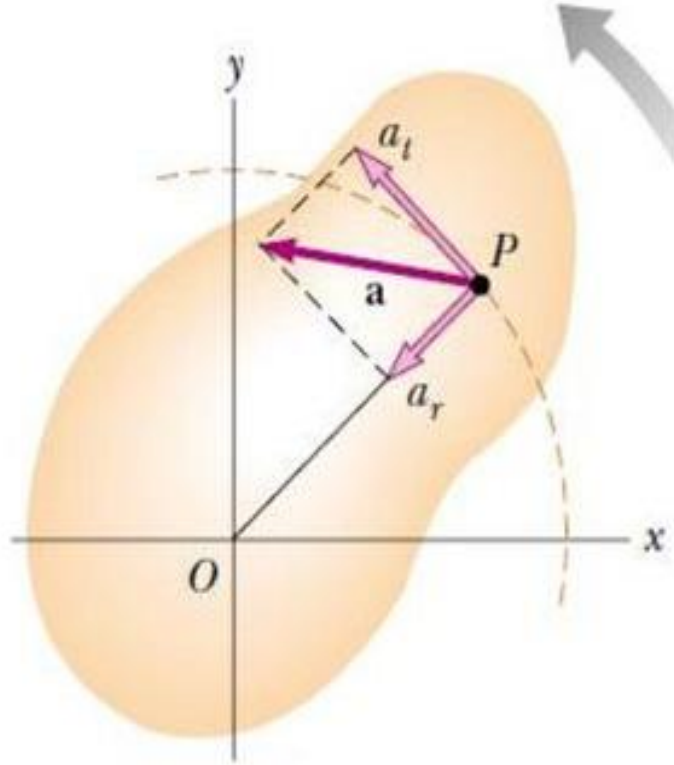


Çizgisel hız teğet hız vektörünün dönme eksenine uzaklığına bağlıdır. Açısal hız ise dönme eksenini doğrultusunda dönme düzlemine dik doğrultuda bir yöndedir. Dolayısıyla dönme hareketinde katı cismin farklı yerlerinde çizgisel hız farklı olabilir, fakat açısal hız sabittir

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$$

Teğetsel ivme

$$a_t = r\alpha$$



Dairesel bir yörüngede dönen bir noktanın, merkeze yönelik a_r radyal ivme ile hareket ettiği bilinmektedir.

$$a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

Radyal ivme

$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r$ Toplam çizgisel ivme

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Dönme Kinetik Enerjisi

Dönme Enerjisi

$$K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

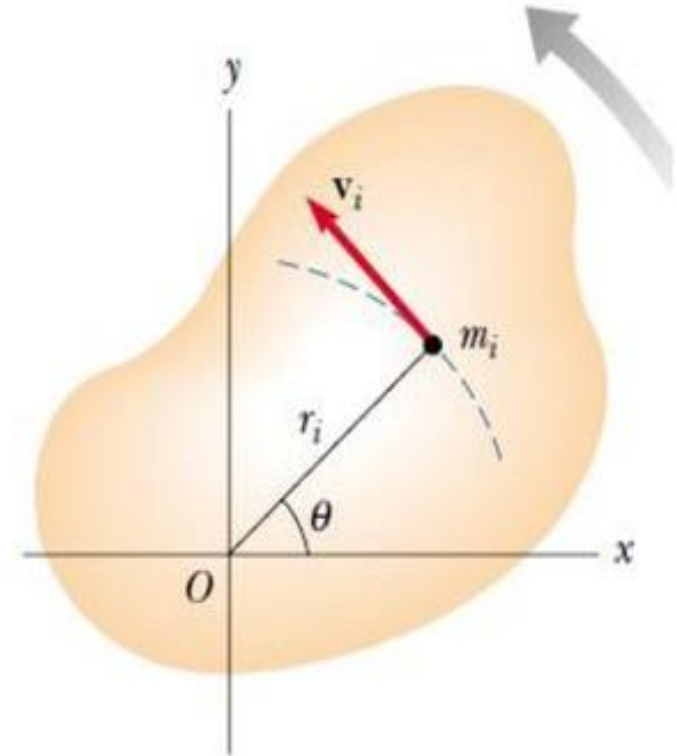
$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2$$

$$K_R = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2$$

Eylemsizlik Momenti

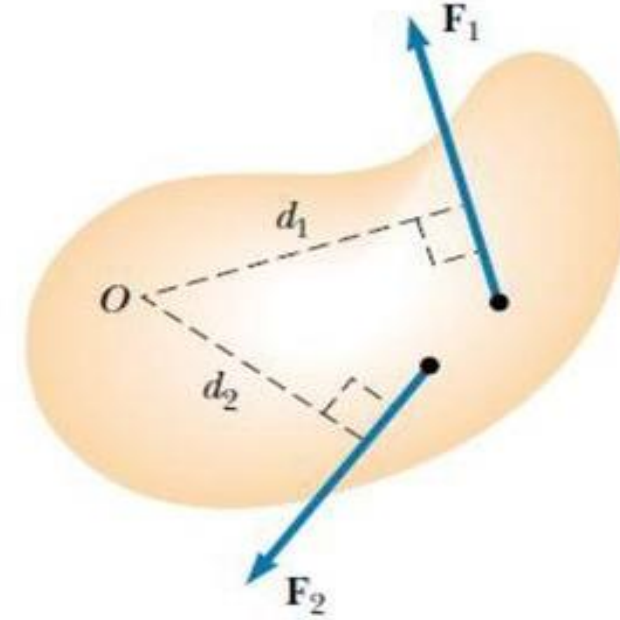
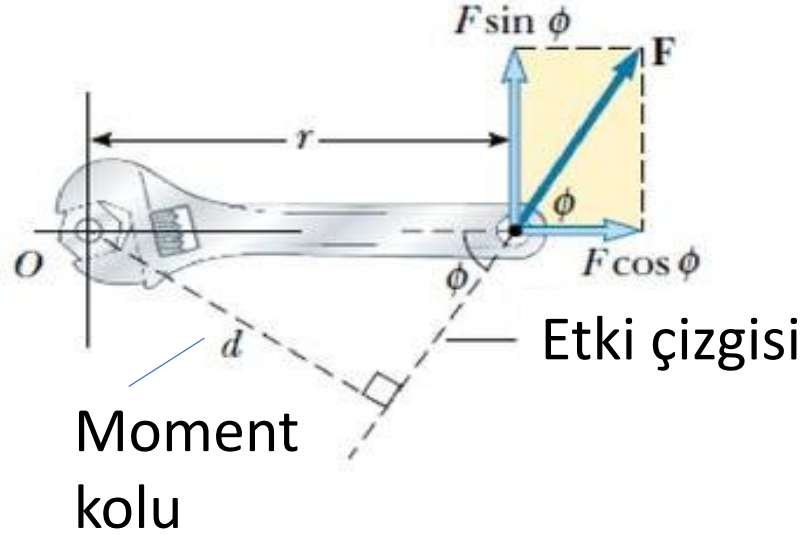
$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$$



Tork

Uygulanan bir kuvvetin belirli bir dönme eksenini etrafında uygulandığı cismi döndürme eğilimine, «**Tork**» denir. Tork (τ), kuvvetle karıştırılmamalıdır.

$$\tau \equiv rF \sin \phi = Fd$$



Cisim üzerine iki kuvvet uygulanırsa.

Her bir kuvvetin döndürme eğilimi vardır.

Tork, saatin tersi yönünde döndüren kuvvetler için pozitif, saat yönünde döndürenler için negatiftir.

$$\Sigma \tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2$$

Tork ve Açısal İvme

Dönme hareketi yapacak cisme etkiyen teğet kuvvet

$$F_t = ma_t$$

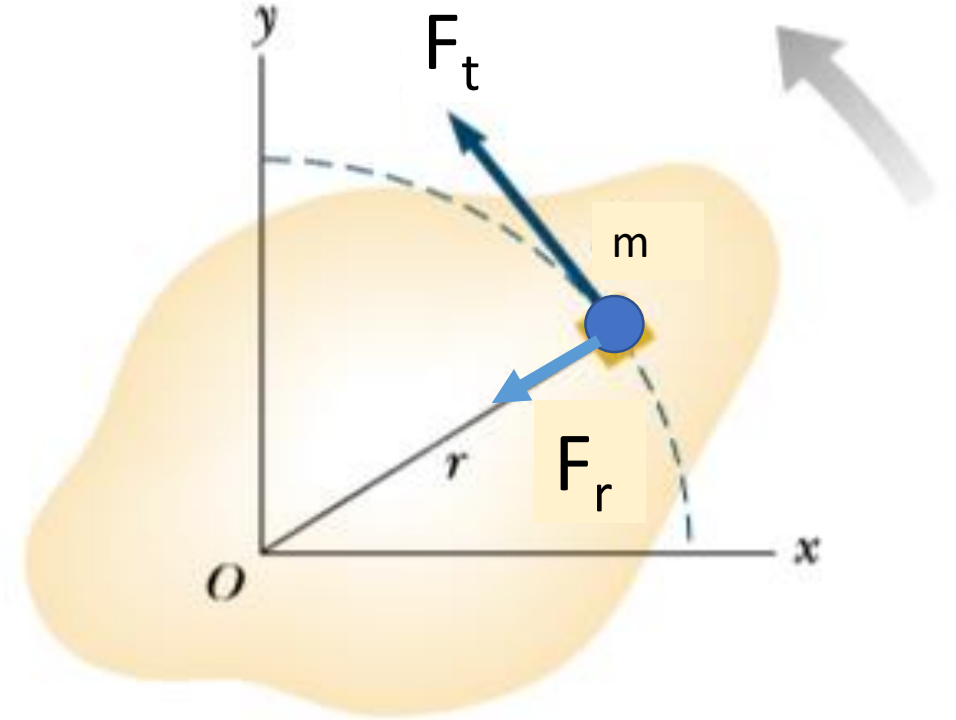
Tork,

$$\tau = F_t r = (ma_t) r$$

$$a_t = r\alpha \quad \text{ise} \quad \tau = (mr\alpha) r = (mr^2)\alpha$$

$$\tau = I\alpha$$

Parçacığa etkiyen tork, açısal ivmesi ile orantılıdır.



Dönme Hareketinde İş-Güç-Enerji

Cisim dt süresinde ds kadar döndüğünde F kuvvetinin yaptığı iş;

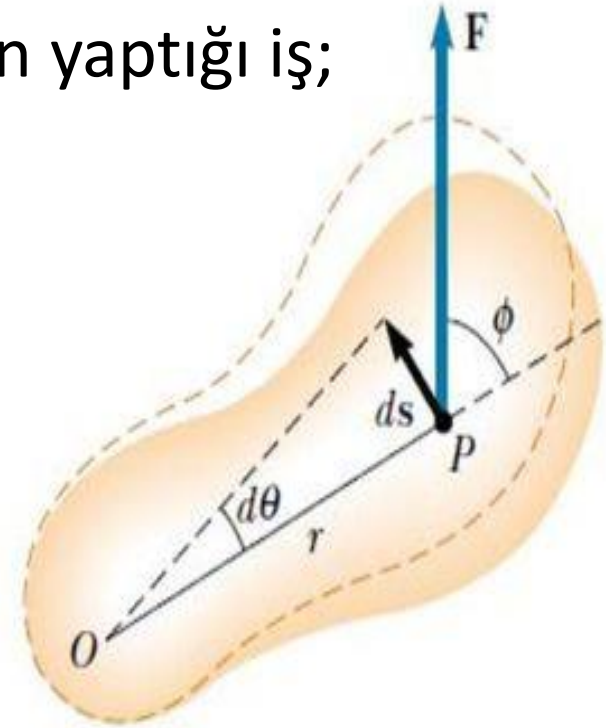
$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (F \sin \phi) r d\theta$$

$rF \sin \phi$ Tork ise,

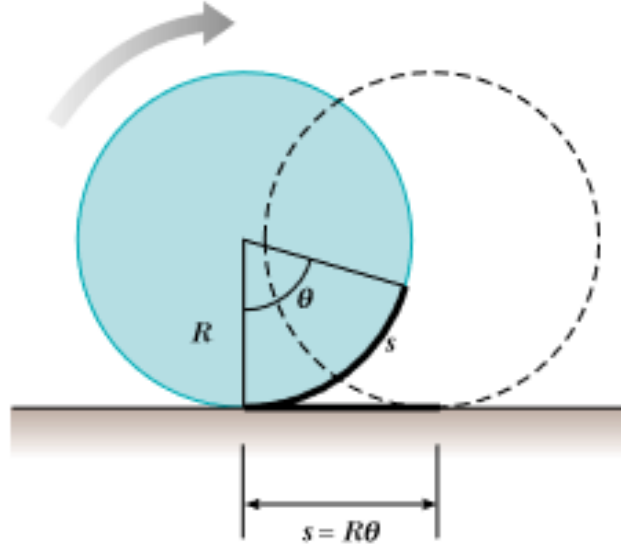
$$dW = \tau d\theta$$

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \tau \omega$$



Yuvarlanma Hareketi, Açısal momentum



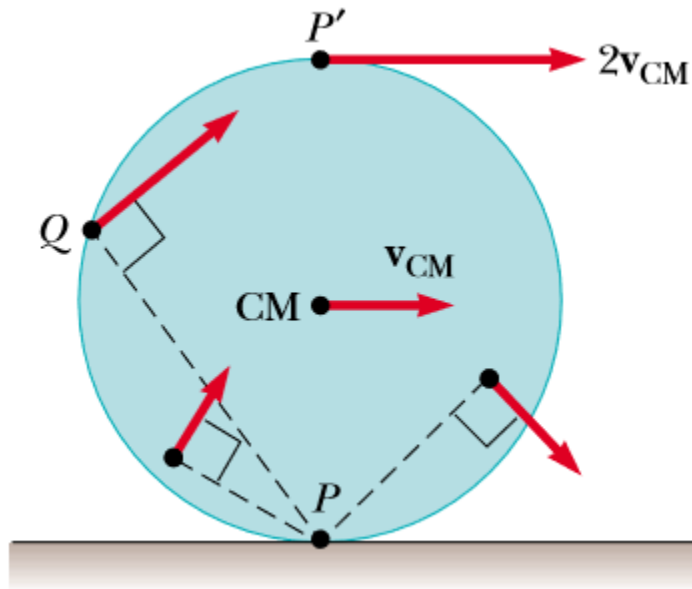
- Yuvarlanma hareketinde dönme eksenini uzayda **sabit değil**.
- Şekildeki gibi bir silindir doğru yol boyunca yuvarlanıyor.
- Bu harekette kütle merkezi etrafında dönme ve kütle merkezinin ötelenmesi hareketleri mevcuttur.
- Pürüzlü yatay bir yüzey üzerinde yuvarlanan düzgün silindir.
- Silindir θ kadar dönüyor.
- Kütle merkezi $s = R\theta$ kadar yol alır.

Yuvarlanma hareketi yapan silindirin kütle merkezinin hız ve ivmesi:

$$v_{\text{CM}} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$a_{\text{CM}} = \frac{dv_{\text{CM}}}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

Yuvarlanan silindir üzerinde değişik noktaların çizgisel hızları şekilde gösterilmiştir.



Herhangi bir noktanın çizgisel hızı, o noktayı değme noktasına birleştiren çizgiye diktir.

P noktası yüzeye göre durgundur. P nin hızı sıfırdır.

Q noktasının hem yatay hem düşey hız bileşeni vardır.

- Yuvarlanan silindirin toplam kinetik enerjisi;

$$K = \frac{1}{2}I_P\omega^2$$

I_p ; P noktasından geçem eksen etrafındaki eylemsizlik momenti.

Paralel-eksen teoreminden yararlanarak şu ifade yazılır:

$$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

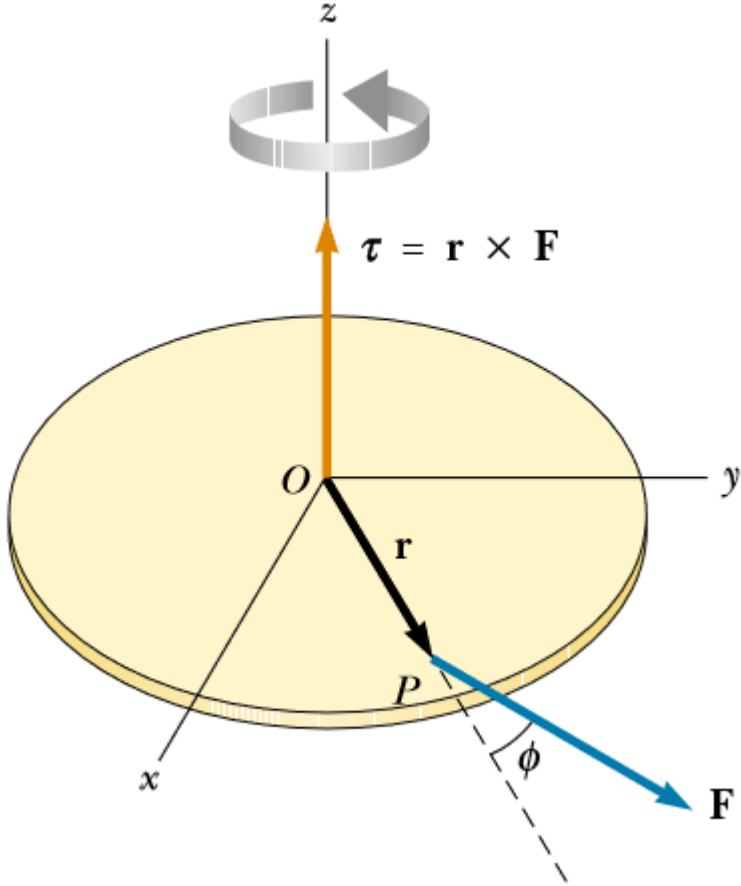
$$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

Yuvarlanan cismin toplam kinetik enerjisi

Kütle merkezi
etrafındaki dönme
kinetik enerjisi

Kütle
merkezinin
öteleme
kinetik enerjisi

Vektörel Çarpım ve Tork



- O başlangıç noktasına göre F kuvveti tarafından meydana getirilen dönme momentinin (tork) büyüklüğü

$$rF \sin \phi$$

ye eşittir.

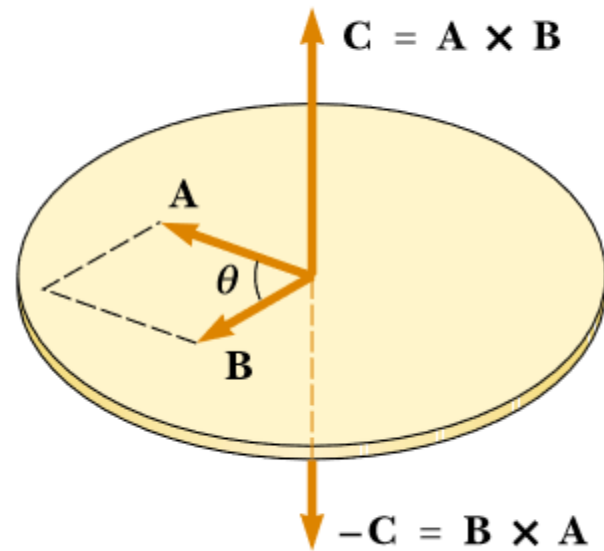
- ϕ ; r ve F vektörleri arasındaki açıdır.
- Şekildeki gibi F kuvveti xy düzleminde uzanırsa o zaman τ dönme momenti z-eksenine paralel bir vektörle temsil edilir.

- O zaman cismin saatin dönüş yönünün tersine döndürmeye çalışan bir tork (τ) oluşturur.
- τ, z — eksenini doğrultusunda ve artan z yönündedir.
- F nin yönü ters çevrilirse o zaman τ eksi z yönünde yönelir.
- Tork (τ) , gerçekte

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

İki vektörün vektörel çarpımına eşittir.

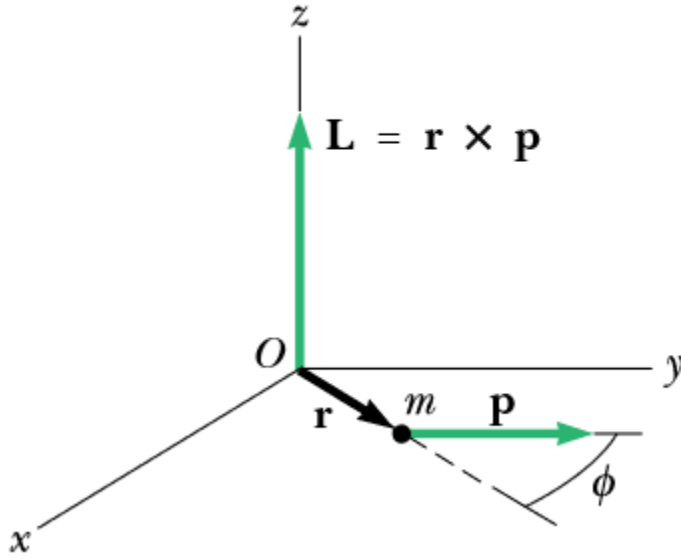
Sağ - el Kuralı



Right-hand rule



Bir Parçacığın Açısal Momentumu



- O koordinat başlangıcına göre bir parçacığın L açısal momentumu, o andaki konum vektörü ile p çizgisel momentumunun vektörel çarpımıdır.
- Birimi $\text{kg.m}^2/\text{s}$ dir.
- L nin büyüklük ve yönü koordinat başlangıcının seçimine bağlıdır.
- Yönü sağ-el kuralıyla belirlenir.
- L vektörünün büyüklüğü şöyle hesaplanır.

$$L = mvr \sin \phi$$