

Clifford Cebiri ile Diferansiyel Geometri

Ferhat Taş

Ocak 2020

1 3-Boyutlu Uzayda Yansıma, Dönme ve Kuaterniyonlar (Dördeyler)

3-boyutlu uzayda bir vektör genellikle $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ veya (x, y, z) şeklinde gösterilir. Bu gösterimi pekala daha yüksek boyutlara genellemek mümkündür. Bunu yapabilmek için yukarıdaki vektör gösteriminin alternatifi olan $\mathbf{x} = x^1\mathbf{i}_1 + x^2\mathbf{i}_2 + x^3\mathbf{i}_3$ gösterimi kullanılır, böylece bu uzayın bazları cinsinden

$$\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) = x^1(1, 0, 0) + x^2(0, 1, 0) + x^3(0, 0, 1) \quad (1)$$

şeklinde yazılır. Bu gösterimde dikkat ederseniz koordinatların indeksi üstel olarak gösterilmiştir. Bunun sebebi eğri uzaylarda çalışmalar yapıyor olmamızdır. Böylece Einstein'ın Genel Görelilik Teorisindeki eğri uzayda yaşadığımızı kabul ederiz. Bu da bu indisin üstel olarak kullanılmasındaki uygunluğu açıklar. Şimdi, bir vektör (1) deki gibi birim satır (veya sütun) vektörlerin bir lineer toplamı şeklinde yazılabilir. Ancak bazen de bir vektörü kare matrislerin bir lineer toplamı şeklinde yazmak da kullanışlı olabilir. Örneğin,

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3 \quad (2)$$

ifadesindeki bazlar

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde alınabilir. İlk bakışta bu çok kullanışsız görünebilir ancak, bir vektörü bu kare matrisler cinsinden temsil etmek, vektörleri başka türlü mümkün olmayacak şekilde çarpmamızı sağlar. Bu matrisler bazı özdeşliklere de sahiptir. Özellikle,

$$(\mathbf{e}_1)^2 = (\mathbf{e}_2)^2 = (\mathbf{e}_3)^2 = \mathbf{I} \quad (3)$$

biçimine gelir ve burada $\mathbf{I}$ birim matrisi temsil eder. Bundan başka,

$$\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0 \quad (4)$$

özdeşliği de gerçekleşir. İşte bu (3) ve (4) özdeşliklerini sağlayan matrislerin kümesine 3-boyutlu Öklid uzayı ile ilintili *Clifford Cebiri* nin bazıları denir. Bu özdeşlikleri sağlayan yukarıdaki matrislerden başka matrisler de tabii ki vardır. Clifford cebiri formalizminde hiçbir zaman belirli bir matris gösteriminin bileşenleri ile ilgilenilmez. Şimdi iki vektörün çarpımına bakalım: $\mathbf{y} = y^1\mathbf{e}_1 + y^2\mathbf{e}_2 + y^3\mathbf{e}_3$ nin $\mathbf{x}$ ile çarpımı

$$\begin{aligned} \mathbf{xy} &= (x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3)\mathbf{I} + x^2y^3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + x^3y^2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 \\ &\quad + x^3y^1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + x^1y^3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + x^1y^2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + x^2y^1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. (4) özdeşlikleri kullanılarak bu ifade

$$\begin{aligned} \mathbf{xy} &= (x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3)\mathbf{I} + (x^2y^3 - x^3y^2)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \\ &\quad + (x^3y^1 - x^1y^3)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + (x^1y^2 - x^2y^1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (5)$$

şekline basitleşir. Dikkat ederseniz genellikle $\mathbf{xy} \neq \mathbf{yx}$ dir (matris çarpımı olduğu için). Şimdi bu (5) denklemden aşına olduğumuz $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ iç (skaler) çarpımı ve daha az bilinen $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ dış (wedge) çarpımı tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{I} &= \frac{1}{2}(\mathbf{xy} + \mathbf{yx}) = (x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3)\mathbf{I} \text{ ve} \\ \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} &= \frac{1}{2}(\mathbf{xy} - \mathbf{yx}) = (x^2y^3 - x^3y^2)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \\ &\quad + (x^3y^1 - x^1y^3)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + (x^1y^2 - x^2y^1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (6)$$

İç çarpımın tanımındaki $\mathbf{I}$ ifadesi çarpımın boyutu aynı olsun diye simgesel olarak vardır ancak genelde görmezden gelinir. Dış çarpımda görünen $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ ifadelerinin katsayılarına dikkat ederseniz, bunlar $\mathbf{xx}$ kartezyen çarpımının katsayılarıdır.

1.0.1 1-Vektör, 2-Vektör, 3-Vektör ve Clifford Sayıları

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ün tüm olası çarpımları düşünüldüğünde, $\{\mathbf{I}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\}$ ile gerilen 8-boyutlu bir uzay elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \text{ve } \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde verilebilir. Daha fazla elemanın çarpımının yapılabileceğini düşünebilirsiniz ancak bu yine yukarıdaki çarpımlardan birinin bir katı olacaktır. Örneğin,

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1.$$

Bu ifadelerle göre çarpıma göre kapalı 8-boyutlu bir vektör uzayımız var. Bu tip vektör uzaylarına *cebiri* adı verilir. Bu cebirlere Clifford Cebiri adı verilir. $\mathbf{I}$ burada $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ matrislerini *Dirac vektörleri* olacak biçimde etiketler. Dirac vektörlerinin herhangi lineer toplamı bir 1-vektördür. $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ lerin lineer toplamı ise bir 2-vektördür. Benzer biçimde $\mathbf{I}$ nın herhangi bir skaler çarpımı 0-vektördür ve $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ ün herhangi bir skaler çarpımı ise bir 3-vektördür. Olası farklı tipteki vektörlerin bir genel lineer toplamı bir *Clifford sayısıdır*. Dirac vektörlerinin çarpımları için kısaltılmış bir gösterim kullanmak yardımcı olacaktır. Özel olarak,

$$\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{23}, \quad \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{31}, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{12}, \quad \text{ve} \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{123}.$$

1.0.2 Yansıma ve Dönme Operatörleri

Clifford sayılarının cebirsel özellikleri bize yansımaları ve dönmeleri temsil etmek için uygun bir yol sağlar. $\mathbf{a}$ 'nın başlangıç noktasından geçen bir düzleme dik, birim uzunluklu bir vektörü olduğunu ve $\mathbf{x}$ 'in E^3 'teki keyfi bir vektör olduğunu varsayalım. Ek olarak, $\hat{\mathbf{x}}$ 'nin $\mathbf{a}$ 'ya karşılık gelen düzleme göre $\mathbf{x}$ 'in yansımasıyla elde edilen vektör olduğunu varsayalım. O halde

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{a} \quad (7)$$

denklemini yazabiliriz. (6) denkleminde,

$$2\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{a} = (\mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{a})\mathbf{a} = \mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{a} + \mathbf{x}(\mathbf{a})^2 = \mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{a} + \mathbf{x}$$

olduğu aşıkardır ve böylece (7) denklemini

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{a} \quad (8)$$

halini alır. Dönme birbirini izleyen iki yansımanın sonucudur. $\hat{\mathbf{x}}$ vektörünün, $\mathbf{x}$ vektörünün, ekseninin doğrultusu $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ olan doğru etrafında 2ψ açısı ile dönmesi sonucu oluştuğunu görebiliriz. Bu bağıntı şu şekilde yazılabilir:

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{b}\hat{\mathbf{x}}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{a}\mathbf{b} \quad (9)$$

veya

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}\mathbf{R} \quad (10)$$

yazılabilir. $\mathbf{a}\mathbf{b}$ çarpımının açıkça hesaplanması ve ayrı bileşenlerini de yorumlamak yararlıdır. Eğer

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$$

ve

$$\mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2 + b^3\mathbf{e}_3$$

ise (7) ve (8) denkleminde,

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \mathbf{a}\mathbf{b} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{b} - \mathbf{b}\mathbf{a}) \\ &= \mathbf{I}\langle\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \end{aligned}$$

olur. $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ vektörleri birim olduğundan $\langle\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \cos \psi$ haline indirgenir. Ayrıca diğer bağıntıdan $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sin \psi$ olur. $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ nin aksine bir 2-vektör olmasına rağmen aynı bileşenlere sahiptir. Bu sebepten,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (n^1\mathbf{e}_{23} + n^2\mathbf{e}_{31} + n^3\mathbf{e}_{12}) \sin \psi$$

yazılabilir. Burada $n^i, (i = 1, 2, 3)$ ler $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ekseninin doğrultman kosinüsleridir. Bu bilgi ile birlikte,

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} \cos \psi + (n^1\mathbf{e}_{23} + n^2\mathbf{e}_{31} + n^3\mathbf{e}_{12}) \sin \psi$$

Şimdi dikkat edilirse, bu düşünce daha yüksek boyutlara genelleştirilebilir. Yüksek boyutlarda $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ iyi tanımlı iken, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ manasız kalacaktır. Daha yüksek boyutlarda, artık bir dönme ekseniniz yoktur; bu nedenle dönmeyi, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ ile gerilen 2 boyutlu düzlemde meydana geldiğini düşünmelisiniz. Dikkat ederseniz burada ψ dönme açısının yarısını temsil eder. Eğer θ esas dönme açısı ise,

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} \cos \frac{\theta}{2} + (n^1\mathbf{e}_{23} + n^2\mathbf{e}_{31} + n^3\mathbf{e}_{12}) \sin \frac{\theta}{2} \quad (11)$$

$\mathbf{R}$ den $\mathbf{R}^{-1}$ elde etmek için, θ yerine $-\theta$ yazılabilir veya Dirac vektörlerinin sırası tersine çevrilebilir. Her iki durumda da,

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I} \cos \frac{\theta}{2} - (n^1\mathbf{e}_{23} + n^2\mathbf{e}_{31} + n^3\mathbf{e}_{12}) \sin \frac{\theta}{2} \quad (12)$$

olur. (11) denkleminde geri dönersek, aynı dönme için iki temsil olduğunu görüyoruz. (11) e göre $\mathbf{R}$, $-\mathbf{R}$ e denktir. (12) den görüyoruz ki $\mathbf{R}$ nin işaretinin değişiminin

θ yerine $\theta + 2\pi$ koyulmasına denktir. Gerçekten, $\mathbf{R}$ operatörü 2π 'nin beklenen periyodikliğine sahip değildir, ancak 4π 'lik bir periyodikliğe sahiptir. İlk olarak aklımıza Clifford cebirinin istenmeyen bir komplikasyon getirdiğini düşünebiliriz. (11) bağlamında durum bu olabilir. Bununla birlikte, bu “komplikasyon” un fiziksel gerçekliğe karşılık geldiği durumlar vardır. Bunu bir sonraki kısımda tartışacağız. Bu arada, k yansımaları için şunu not ediyoruz:

$$\hat{\mathbf{x}} = (-1)^k \mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k-1} \dots \mathbf{a}_1 \mathbf{x} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_k = (-1)^k \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x} \mathbf{T} \quad (13)$$

1.0.3 Dördeyler

Kuaterniyonları kullanarak, (12) 'de belirtilen formla özdeş bir biçimde bir rotasyon operatörünü temsil edebilirsiniz. Dördeyler nedir? 1843'te William Rowan Hamilton (1805-1865) tarafından icat edildi (keşfedildi mi?). O zamandan önce, karmaşık sayıların çarpımının, 2 boyutlu bir düzlemdeki noktaların çarpımı olarak yorumlanabildiği gözlemlendi. Bu ilk olarak 1797'de Casper Wessel (1745-1818) tarafından, daha sonra 1806'da tekrar bağımsız olarak Jean Robert Argand (1768-1818) tarafından yapıldı (Kramer 1981, s. 72-73). Yani,

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc), \text{ veya bunun yerine} \\ (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

yazılabilir. Hamilton'un kendisine sorduğu soru şuydu: “Bu çarpmanın fizikteki çalışmalar için yararlı olacak 3 boyutlu bir versiyonu olabilir mi?” Onun fikri karmaşık sayılar kavramını genelleştirmek olduğu için, formun üçlüsünü araştırıyordu: $a + ib + jc$. Her türlü çarpma kuralını icat edebilirsiniz, ancak fizik çalışması için anlamlı ve yararlı olacak bir kural arıyordu. 1828'den başlayarak, bu projede 15 yıl boyunca başarılı olamadı. Sonunda 16 Ekim 1843'te (Pazartesi) bir ”evreka” deneyimi yaşadı. Kraliyet İrlanda Akademisi'nin bir Konsey toplantısına başkanlık etmek için karısıyla birlikte Dublin'deki Kraliyet Kanalı'nın yanında yürüyordu. Sonra bir anda dördünce bir boyut eklemesi gerektiğinin farkına vardı. $a + ib + jc + kd$ formundaki sayıların çarpımı kuralını Broome köprüsündeki bir taşla yonttu. Zaman orijinal oymayı yok etti, ancak 1958'de İrlanda Kraliyet Akademisi olayı anmak için bir plak dikti:

Here as he walked by on the 16 th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$$

and cut it in a stone on this bridge.

Hamilton'ın yonttuğu formülden şunu gösterebiliriz:

$$\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}, \text{ ve } \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$$

Bu başarısı nedeniyle, William Hamilton modern “soyut cebirin” kurucusu olarak bilinir. Dördeyler teorisinde, (12) 'de belirtilen denklemdekine karşılık gelen bir döndürme operatörü şu şekilde yazılır:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} \cos \frac{\theta}{2} - (n^1 \mathbf{i} + n^2 \mathbf{j} + n^3 \mathbf{k}) \sin \frac{\theta}{2} \quad (14)$$

(12) denklemi ile karşılaştırıldığında, $-\mathbf{e}_{23}$, $-\mathbf{e}_{31}$, $-\mathbf{e}_{12}$ yi sırasıyla $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ile özdeşleştiririz. Yukarıda da bahsedildiği gibi dördeylerin çarpımı için ikili bağıntılar şunlardır:

$$(\mathbf{i})^2 = (\mathbf{j})^2 = (\mathbf{k})^2 = -1 \quad (15)$$

$$\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i} \quad (16)$$

$$\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}, \text{ ve} \quad (17)$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k} \quad (18)$$

Bunlara karşılık gelen Öklid 3-uzayındaki 2-vektörlerin de aynı denklemleri sağladığını gösterebiliriz:

$$(-\mathbf{e}_{23})^2 = (-\mathbf{e}_{31})^2 = (-\mathbf{e}_{12})^2 = -\mathbf{I} \quad (19)$$

$$(-\mathbf{e}_{31})(-\mathbf{e}_{12}) = -(-\mathbf{e}_{12})(-\mathbf{e}_{31}) = (-\mathbf{e}_{23}) \quad (20)$$

$$(-\mathbf{e}_{12})(-\mathbf{e}_{23}) = -(-\mathbf{e}_{23})(-\mathbf{e}_{12}) = (-\mathbf{e}_{31}) \quad (21)$$

$$\text{ve } (-\mathbf{e}_{23})(-\mathbf{e}_{31}) = -(-\mathbf{e}_{31})(-\mathbf{e}_{23}) = (-\mathbf{e}_{12}) \quad (22)$$

Hamilton'ın formülünde bir $\mathbf{x}$ vektörü $x^1\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$ şeklinde gösterilmiştir ve döndürme sonucu oluşan vektör $\hat{\mathbf{x}}$ (12) nin dördey versiyonundan hesaplanmıştır. Ne olağan vektör formülasyonu ne de Hamilton yaklaşımı sıradan bir vektör ile eksenel veya sözde vektör arasında iyi bir ayrım yapmaz. Gördüğümüz gibi, Clifford cebirinin formalizminde, sıradan bir vektör 1-vektör olarak ve dönme düzlemi 2-vektör olarak görünür. Üç boyutta, bir 1-vektörü ve 2-vektörü üç bileşene sahiptir. Bilinen vektör formalizminde, her ikisi de 1-vektör olarak görünür. Dördey formülasyonunda, her ikisi de 2-vektör olarak görünür. İki durum arasındaki ayrım bir yansıma düşünürsek ortaya çıkar. Örneğin, eğer yz-düzlemine göre bir yansımayı göz önüne alırsak,

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{e}_1\mathbf{x}\mathbf{e}_1$$

Eğer

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3, \text{ ise} \\ \mathbf{x}' &= -x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan, aynı yansıma altında

$$\mathbf{X} = x^1\mathbf{e}_{23} + x^2\mathbf{e}_{31} + x^3\mathbf{e}_{12} = x^1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + x^2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + x^3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$$

2-vektörü

$$\hat{\mathbf{X}} = x^1(-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)(-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1) + x^2(-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1)(-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1) + x^3(-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1)(-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) \text{ veya}$$

$$\hat{\mathbf{X}} = x^1\mathbf{e}_{23} - x^2\mathbf{e}_{31} - x^3\mathbf{e}_{12}$$

haline gelir. Aynı ayrım, olağan vektör formülasyonunda, ancak biraz garip bir şekilde gerçekleştirilir. Kartezyen çarpımı ele alalım.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3, \text{ ve} \\ \mathbf{y} &= y^1\mathbf{e}_1 + y^2\mathbf{e}_2 + y^3\mathbf{e}_3, \text{ ile} \\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} &= (x^2y^3 - x^3y^2)\mathbf{e}_1 + (x^3y^1 - x^1y^3)\mathbf{e}_2 + (x^1y^2 - x^2y^1)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

olsun. Çapraz çarpım yz-düzlemine göre bir yansıma altında nasıl değişmelidir? $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ vektörü sıradan bir vektör ise,

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})' = -(x^2y^3 - x^3y^2)\mathbf{e}_1 + (x^3y^1 - x^1y^3)\mathbf{e}_2 + (x^1y^2 - x^2y^1)\mathbf{e}_3$$

Öte yandan, çapraz çarpımı hesaplamadan önce $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ üzerinde aynı yansımayı yaparsak,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= -\mathbf{x}^1\mathbf{e}_1 + \mathbf{x}^2\mathbf{e}_2 + \mathbf{x}^3\mathbf{e}_3 \\ \hat{\mathbf{y}} &= -\mathbf{y}^1\mathbf{e}_1 + \mathbf{y}^2\mathbf{e}_2 + \mathbf{y}^3\mathbf{e}_3, \text{ ve} \\ \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} &= (x^2y^3 - x^3y^2)\mathbf{e}_1 - (x^3y^1 - x^1y^3)\mathbf{e}_2 - (x^1y^2 - x^2y^1)\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

olur. $\mathbf{x}$ üzerindeki bir yansımanın etkisinin bu ikinci yorumu uygulandığında, çapraz çarpıma *eksenel* veya *sözde vektör* denir. Clifford cebiri bağlamında, sözde-vektör 2-vektördür ve bu gariplik ortadan kalkar. Benzer olarak geleneksel vektör formülasyonunda bir *sözde skaler* olarak bilinen $\langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ ifadesi Clifford cebirinde bir 3-vektör olur. Üç boyutta, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ gibi iki vektörün kapsadığı bir düzleme dik bir vektör aradığında, normal çapraz çarpımı kullanmak yine de yararlı olabilir. Böylece, hala normal tanımını kullanacağız:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x^2y^3 - x^3y^2)\mathbf{e}_1 + (x^3y^1 - x^1y^3)\mathbf{e}_2 + (x^1y^2 - x^2y^1)\mathbf{e}_3$$

Bununla birlikte, (8) 'de tanımladığımız bir dış çarpım kavramına da ihtiyacımız olacak. Yani:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{xy} - \mathbf{yx}) = (x^2y^3 - x^3y^2)\mathbf{e}_{23} + (x^3y^1 - x^1y^3)\mathbf{e}_{31} + (x^1y^2 - x^2y^1)\mathbf{e}_{12}$$

Bu bölümü kapatırken *dik dönüşümler* kavramını dikkatinize sunmak istiyoruz. Dik bir dönüşüm, basitçe yansımaların bir çarpımıdır. Bu terminoloji, E^n deki standart skaler çarpımın korunduğuna odaklanmak istediğinde seçilir. Bu bölümde kendimizi 3-boyutlu uzaya kısıtladık. Bu bağlamda, yansımaların çarpımlarının gerçekten skaler çarpımı koruduğunu doğrulamanız uygundur (en azından 3-boyutta)(Problem 6 ve 7 ye bkz.). Bir çift sayıdaki yansımaların (bir dönme) çarpımına *esas dik dönüşüm*, tek sayıdaki çarpımlarına ise *esas olmayan dik dönüşüm* denir.

1.0.4 Problemler

1.

1.1 Dönme Operatörünün 4π - Periyotluğu

Son bölümün sonuçlarından şunu görüyoruz; $\mathbf{x}(0)$ vektörünün θ boyunca dönmesi sonucu oluşan vektöre $\mathbf{x}(\theta)$ dersek,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(\theta) &= \mathbf{R}^{-1}(\theta)\mathbf{x}(0)\mathbf{R}(\theta), \quad \text{burada} \\ \mathbf{R}(\theta) &= \mathbf{I} \cos \frac{\theta}{2} + \hat{\mathbf{n}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \hat{\mathbf{n}} &= n^1 \mathbf{e}_{23} + n^2 \mathbf{e}_{31} + n^3 \mathbf{e}_{12}, \quad \text{ve}\end{aligned}$$

n^1, n^2, n^3 ile birlikte dönme eksenini için doğrultman kosinüsleridir. $\mathbf{x}(\theta)$ nın periyodu 2π olmasına rağmen, $\mathbf{R}(\theta)$ nın periyodu 4π dir! 1920 lerde kuantum mekaniğinin gelişimi ile birlikte 4π periyotlar doğada gözlenmeye başlandı. Hidrojen enerji spektrumunun gözlenen yapısını açıklamak için elektrona $1/2$ oranında bir spin ve 4π lik bir periyodiklik atfetmek gerekiyordu. Daha sonra, elektronlardan daha büyük bazı nesnelerin de 4π periyodikliğe sahip olduğu fark edildi (Bolker 1973). Bu gerçeğin bir gösterimi Edgar Riefin (1979) tarafından ortaya konmuştur.

Bir nesnenin 4π lik bir periyodiklik göstermesi için, bir anlamda çevresine bağlı olması gerekir. Bunu açıklamak için şu şekilde bir gösteri yapmak isteyebilirsiniz: İlk önce avucunuzun içinde bir bardak su tutun. Camı tutan el sol veya sağ olabilir, ancak elinizin avuç içi yukarı bakacak şekilde camın altında olması önemlidir. Ardından camı sıkıca tutun ve ayaklarınızı hareket ettirmeden ve suyu dökmeyen bardağı 360 derece döndürün. Bu manevrayı tamamladığınızda, cam başınızın biraz üzerinde ve dirseğiniz yukarı bakacak şekilde kendinizi garip bir konumda bulacaksınız. Açıkçası, camın sizinle olan ilişkisi, başlangıç pozisyonundan oldukça farklıdır. Bununla birlikte, dönmeye devam ederseniz, kolunuzun kendini çezeceğini ve camın sizinle ilk ilişkisi ile başlangıç konumuna geri döneceğini bulmak sizi şaşırtabilir. Bu nedenle, kolunuza iliştilen camın 2π periyodikliği değil 4π periyodikliği vardır. Daha akademik olması açısından elinize bardak yerine kitap koyabilirsiniz :)

1.2 Düzgün Çokyüzlüler için Nokta Grupları *Ekstra*

Fizikte büyük ilgi gören geometrinin bir tarafıda simetri gruplarıdır. Bir cismin simetrisi, noktalar arasındaki mesafeleri koruyan ve cismin orijinal uzayına getiren dönüşümler dizisi ile karakterize edilebilir. Oldukça makul olarak, bunlara *simetri dönüşümleri* denir. Sonsuz cisimler için (örneğin sonsuz bir kristal kafes (son derece enteresan olan bu konunun araştırılması okuyucuya bırakılmıştır)), simetri dönüşümleri kümesi ötelemeler içerebilir. Ancak sonlu cisimler için, simetri dönüşümleri dönmelere ve ayrıca dönmeler ile yansımaların çarpımlarına kısıtlanır. Bu nedenle Clifford cebiri, sonlu cisimlerdeki simetri matematiğine girişmek için iyi bir araçtır. Bu konuyu derinlemesine ele almadan önce, Elie Cartan' a ait bir teoremi kanıtlamak yararlı olacaktır (1938, s. 13–17; 1966, s. 10-12). Teoreminde, n -boyutlu bir uzayda (gerçek veya karmaşık), herhangi bir

sonlu sayıda yansımadan oluşan bir dönüşümün de n sayısını aşmayan bir dizi yansıma ile elde edilebileceğini belirtir. Burada sadece gerçek 3 boyutlu sürüme ihtiyacımız var ve bu kanıtlayacağımız tek sürüm.

Teorem. *Diyelim ki $\hat{\mathbf{x}} = (-1)^k \mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k-1} \dots \mathbf{a}_1 \mathbf{x} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_k$ olsun, yani k yansıma içeren bir dönüşümümüz var. O halde aynı dönüşüm (3-boyutlu uzayda) üç veya daha az yansıma ile elde edilebilir.*

İspat. Durum 1: k çift olsun. Çift sayıdaki 1-vektörü çarparsak $\mathbf{I}$ 0-vektörünün ve $\mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31}$, ve $\mathbf{e}_{21}$ 2-vektörlerinin bir lineer toplamı elde edilir. Yani

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_k = \mathbf{I} \alpha + \mathbf{e}_{23} \beta^1 + \mathbf{e}_{31} \beta^2 + \mathbf{e}_{12} \beta^3$$

(Bu zaten bir dönme operatörü gibi duruyor!) $\mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k-1} \dots \mathbf{a}_1$ operatörü temelde Dirac vektörlerinin ters yönde sıralanması haricinde $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_k$ ile aynıdır. Böylece,

$$\mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k-1} \dots \mathbf{a}_1 = \mathbf{I} \alpha + \mathbf{e}_{32} \beta^1 + \mathbf{e}_{13} \beta^2 + \mathbf{e}_{21} \beta^3 = \mathbf{I} \alpha - \mathbf{e}_{23} \beta^1 - \mathbf{e}_{31} \beta^2 - \mathbf{e}_{12} \beta^3$$

$(\mathbf{a}_1)^2 = (\mathbf{a}_2)^2 = \dots = (\mathbf{a}_k)^2 = \mathbf{I}$, $(\mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k-1} \dots \mathbf{a}_1) (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_k) = \mathbf{I}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= (\mathbf{I} \alpha - \mathbf{e}_{23} \beta^1 - \mathbf{e}_{31} \beta^2 - \mathbf{e}_{12} \beta^3) (\mathbf{I} \alpha + \mathbf{e}_{23} \beta^1 + \mathbf{e}_{31} \beta^2 + \mathbf{e}_{12} \beta^3) \\ &= \mathbf{I} \left((\alpha)^2 + (\beta^1)^2 + (\beta^2)^2 + (\beta^3)^2 \right) \end{aligned}$$

olur. O halde $(\alpha)^2 + (\beta^1)^2 + (\beta^2)^2 + (\beta^3)^2 = 1$ olur ve böylece

$$\cos \psi = \alpha \text{ and } \sin \psi = \sqrt{(\beta^1)^2 + (\beta^2)^2 + (\beta^3)^2}$$

şartlarını sağlayan bir ψ açısı tanımlanabilir. Bundan başka, eğer β^k lardan en az biri sıfırdan farklıysa, dönme eksenini için doğrultman kosinüslerini şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$n^k = \beta^k / \sqrt{(\beta^1)^2 + (\beta^2)^2 + (\beta^3)^2} = \beta^k / \sin \psi \quad \text{for } k = 1, 2, \text{ and } 3$$

(Dikkat ederseniz, $(n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1$). Şu anda

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_k = \mathbf{I} \cos \psi + (n^1 \mathbf{e}_{23} + n^2 \mathbf{e}_{31} + n^3 \mathbf{e}_{12}) \sin \psi$$

olduğunu gösterdik. Eğer $\sin \psi = 0$ ise, $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_k = \pm \mathbf{I}$ olur. Diğer türlü aşıkâr olmayan bir dönme operatörü olur. Bu dönme yerine iki yansımanın alınabileceği açıktır.

Durum 2: k tek olsun. Bu durumda bir dönme operatörü elde etmek için $k-1$ yansımanın çarpımı alınır:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_k &= [\mathbf{I} \cos \psi + (n^1 \mathbf{e}_{23} + n^2 \mathbf{e}_{31} + n^3 \mathbf{e}_{12}) \sin \psi] \mathbf{a}_k \\ &= [\mathbf{I} \cos \psi + (n^1 \mathbf{e}_{23} + n^2 \mathbf{e}_{31} + n^3 \mathbf{e}_{12}) \sin \psi] (k^1 \mathbf{e}_1 + k^2 \mathbf{e}_2 + k^3 \mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

Eğer $\sin \psi = 0$ veya $k^1 n^1 + k^2 n^2 + k^3 n^3 = 0$ ise $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_k$ çarpımı bir 1-vektöre indirgenir. Diğer türlü, dönmeyi iki yansıma şeklinde ayırırsak üç yansımanın

çarpımı oluşur.

Şimdi simetri grupları hakkında oldukça zekice bir tartışma yapabileceğiz. Genel olarak, belirli bir sonlu cismi uzayda orijinal konumuna getiren çoklu yansıma kümesine iki nedenden dolayı bir nokta grubu denir. Birincisi, en az bir noktanın belirli bir cisimle ilişkili tüm simetri dönüşümleri altında sabit kalmasıdır. İkincisi, belirli bir cisimle tanımlanan simetri dönüşümleri kümesinin, grup olarak bilinen bir matematiksel yapı oluşturmasıdır (Pisssst Dihedral!). Sadece birkaç nokta grubunun kısa bir tanımını vereceğiz - özellikle beş normal çokyüzlüyle ilişkili beş nokta grupları. Çokyüzlülerin her biri için sonlu bir simetri grubumuz var. Sonlu bir katı için bir simetri grubunun elemanları sonlu yansıma çarpımlarıdır. İki sonlu çarpımın çarpılmasının, ilgili katının orijinal konumunu koruyan sonlu bir çarpımla sonuçlandığı açıktır. Böylece, simetri dönüşümleri kümesi kapatma özelliğini karşılar.

Birim eleman, 360 derecenin bazı tam katlarını hiçbir şey yapmayan veya döndürmeyen dönüşüme karşılık gelir.

Bir yansımanın tersini elde etmek için, sadece aynı yansımaları ters sırayla inşa etmek yeterlidir.

Düzgün çokyüzlülerin simetri gruplarının sadece sınırlı sayıda üyesi olduğunu göstermek için küp örneğini ele alalım. Cartan teoremini uygulayarak, eşit sayıda yansımanın (uygun bir dikey dönüşüm) birim elemana veya dönmeye indirgenebileceğini biliyoruz. Olası simetri dönmelerini saymak zor değildir.

Belki de, en belirgin simetri dönmeleri, zıt yüzlerin merkezinden geçen dört katlı eksene karşılık gelenlerdir. 360 derece birim dönmeyi saymadan, 90-180 ve 270 derecelerin simetri dönmeleri vardır. Bu şekilde üç eksen olduğundan $3 \times 3 = 9$ eleman verir.

Ayrıca karşıt kenarların orta noktalarından geçen iki katlı eksenlerimiz var. 12 kenar olduğundan, bu tür altı eksen vardır ve bu eksenlerin her biri 180 derece simetri dönüşüne karşılık gelir. Bu, gruptaki altı elemanı daha oluşturur. Sonra, zıt köşelerden geçen dört adet üç katlı eksen var. Bu da gruba sekiz eleman daha ekler. Son olarak, birim dönüşüm var. Bu nedenle, küple ilişkili nokta grubu için uygun dik elemanların toplam sayısı $9 + 6 + 8 + 1 = 24$ tür. (Yansımaların herhangi bir çarpımı Clifford formalizminde $(\pm)$ iki temsile sahip olduğundan, küp için has ortogonal grubun Clifford versiyonunda 48 Clifford sayısı vardır.) Has olmayan dik dönüşümlerin sayısını saymak zordur, çünkü bu kümenin bazı üyeleri basit yansımalar değil, üç yansımanın çarpımından oluşur. Sayım sorunumuzu tamamlamak için aşağıdaki teoremi uygulamak istiyoruz:

Teorem. *Sonlu bir nokta grubu için, has olmayan dik dönüşümlerin (tek sayıdaki yansımaların çarpımları) sayısı, has dönüşümlerin sayısına (eşit sayıda yansımaların çarpımları) eşittir. Dikkat! Grup teorisine aşina olanlar için, aşağıda kanıtlanmış olan durum; has olmayan dik dönüşümler kümesinin, has dik dönüşümlerin alt grubunun bir yan kümesi olduğudur. İspat.* Bu teoremin doğruluğunu göstermek için, grupta basit bir yansıma karşılık gelen bir birim vektör $\mathbf{a}$ seçelim ve $\mathbf{R}$ dönme veya $\pm$ birim dönüşüm $\mathbf{I}$ olmak üzere has olmayan dik dönüşümün $\mathbf{Ra}$ biçiminde tek türlü gösterilebileceğini (işaret belirsizliğinin yanı sıra) gösterelim.

$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_k$ yansımalarının tek sayıda bir çarpımını ele alalım. Çarpım tek sayıda

olduğundan öncelikle $k - 1$ terimi ele alırsanız ki bu bize bir dönme operatörü $\mathbf{R}$ yi versin. O halde

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_k = \mathbf{R} \mathbf{a}_k$$

olur. Eğer $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}$ ise durum aşikar. Diğer durumda,

$$\mathbf{R} \mathbf{a}_k = \mathbf{R} \mathbf{a}_k (\mathbf{a}^2) = \mathbf{R} (\mathbf{a}_k \mathbf{a}) \mathbf{a} = \mathbf{R} \mathbf{R}' \mathbf{a} = \hat{\mathbf{R}} \mathbf{a}$$

olur. Böylece

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_k = \hat{\mathbf{R}} \mathbf{a}$$

olur.

Bu teoremi kübe uygulayınca nokta grubunun eleman sayısı 48 olur(bu sayı çift değerli Clifford versiyonunda 96 dır). Grup teori terminolojisini kullanırsak grubun mertebesi 48 dir. Diğer çokyüzlülerin nokta gruplarının mertebesini bulmaktaki en büyük problem kenar ve köşelerin sayımıdır. Örneğin, dodekahedron(on iki yüzlü) 12 normal beşgen birleştirilerek oluşturulur. Birleştirmeden önce, 12 beşgen $12 \times 5 = 60$ kenara sahiptir. Birleştirildiğinde, bir beşgenden bir kenar ve ikinci bir beşgenden bir kenar dodekahedronun tek bir kenarı haline gelecek şekilde hizalanır. Böylece, dodekahedronun $60/2 = 30$ kenarı vardır, bu da $30/2 = 15$ iki katlı eksene karşılık gelir. Benzer şekilde, 12 beşgenin 60 köşesi dodekahedron için $60/3 = 20$ köşeye dönüşür. Buna karşılık, bu da on adet üç-katlı eksene karşılık gelir.

Beş normal çokyüzlünün dördünde, simetri eksenleri, yüz çiftlerinden, kenar çiftlerinden veya köşe çiftlerinden geçer. Tek istisna tetrahedron(dört yüzlü). Tetrahedron için, iki katlı eksenler gerçekten de kenar çiftlerine karşılık gelir. Bununla birlikte, üç katlı eksenler için durum farklıdır. Tetrahedron için, her üç katlı eksen bir tepe noktasından ve bir yüzden geçer(bakın cebir ve geometri nasıl harmanlanıyor).

Nokta gruplarının mertebesini belirlediğinizde, küp için nokta grubunun mertebesinin oktahedron için nokta grubunun mertebesi ile özdeş olduğunu göreceksiniz.

Bu, iki grubun izomorfik olma olasılığını artırır. Küp ve oktahedron için bu mantıklıdır çünkü dört kat, üç kat ve iki kat eksenlerin sayısı iki grupta eşleşir. Her şeye rağmen, geometriye başvurmadan izomorfik bir karşılık belirlemek çok zor olurdu. Ancak geometriyi kullanarak, izomorfizmi kurmak önemsiz bir alıştırmaya haline gelir. Birinin köşelerini diğerinin yüz merkezleri ile eşleştirebilir.